

Pasquale Cutolo

Dirigente Superiore dell'ex Ministero delle Poste e delle Telecomunicazioni

UNA NOTA SULLE SERIE DIVERGENTI E LORO UTILIZZAZIONE (SECONDA PARTE)

(A NOTE ON DIVERGENT SERIES AND THEIR UTILIZATION)
(SECOND PART)

Sommario: con il presente lavoro viene affrontato lo studio di relazioni riguardanti serie divergenti, soprattutto quelle con termini a segni alterni, e della loro utilizzazione

Abstract: with this work we examine the study of relations concerning divergent series, particularly those having powers with alternate signs, and their utilization.

7.00 Sui numeri di Genocchi

(Angelo Genocchi, nato a Piacenza il 5 marzo 1817, morto a Torino il 7 marzo 1889)

Consideriamo la serie

$$\frac{2x}{e^x + 1} = \sum_{k \geq 0} G_m \frac{x^m}{m!} \quad (7.01)$$

La (7.01) è una serie dove i coefficienti G_m rappresentano i ben noti numeri di Genocchi.

I primi valori di G_m sono dati da:

$$G_0 = 0, G_1 = 1, G_2 = -1, G_4 = 1, G_6 = -3, G_8 = 17, G_{10} = -155, G_{12} = 2073$$

Per $m = 1, 2, 3, \dots$, $G_{2m+1} = 0$

I numeri di Genocchi G_{2m} sono legati ai numeri di Bernoulli dalla seguente formula:

$$: \quad G_{2m} = 2(1 - 2^{2m})B_{2m} \quad (7.02)$$

per cui: $G_{4m} > 0$, $G_{4m-2} < 0$, ($m=1,2,3,\dots$)

(per la formula (7.02), vedasi Testo [10], a pag. 49)

La (7.02) è facilmente dimostrabile.

Infatti: $\frac{2x}{e^x + 1} = \frac{2x}{e^x - 1} - \frac{2(2x)}{e^{2x} - 1}$; sviluppando, otteniamo:

$$\frac{2x}{e^x + 1} = x + \sum_{m \geq 1} G_{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!};$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = \left[1 - \frac{x}{2} + \sum_{m \geq 1} B_{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!} \right]; \quad \frac{2x}{e^{2x} - 1} = 1 - x + \sum_{m \geq 1} B_{2m} \frac{(2x)^{2m}}{(2m)!};$$

$$\text{quindi:} \quad x + \sum_{m \geq 1} G_{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!} = 2 \left[1 - \frac{x}{2} + \sum_{m \geq 1} B_{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!} \right] - 2 \left[1 - x + \sum_{m \geq 1} B_{2m} \frac{(2x)^{2m}}{(2m)!} \right]$$

$$\text{cioè,} \quad \sum_{m \geq 1} G_{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!} = 2 \left[\sum_{m \geq 1} B_{2m} (1 - 2^{2m}) \frac{x^{2m}}{(2m)!} \right]$$

Uguagliando i coefficienti delle potenze di x con lo stesso grado, otteniamo facilmente

la (7.02). La serie (7.01) converge per $x < \pi$, e diverge per $x \geq \pi$, e, quindi, applicando, alla (7.01), l'integrazione di cui

al punto 3.01, troviamo:
$$\int_0^\infty \frac{2xe^{-x}}{e^x + 1} dx = \sum_{k \geq 0} G_m \frac{1}{m!} \int_0^\infty x^m e^{-x} dx \tag{7.03}$$

Calcolando l'integrale del 1° membro della (7.03), troviamo:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{2xe^{-x}}{e^x + 1} dx &= \int_0^\infty \frac{2xe^{-x} e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = 2 \sum_{k \geq 0} (-1)^k \int_0^\infty x e^{-x(k+2)} dx = 2 \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{1}{(k+2)^2} = \\ &= 2 - \frac{\pi^2}{6}; \text{ cioè: } \int_0^\infty \frac{2xe^{-x}}{e^x + 1} dx = 2 - \frac{\pi^2}{6} \end{aligned} \tag{7.04}$$

Per il 2° membro della (7.03), troviamo:

$$\sum_{k \geq 0} G_m = 2 - \frac{\pi^2}{6}, \text{ da cui } \sum_{k \geq 1} G_{2m} = 1 - \frac{\pi^2}{6} \tag{7.05}$$

Il 1° membro della (7.05) definisce una serie divergente, rappresentata dal valore $(1 - \frac{\pi^2}{6})$

Ora, dalla (7.02), ricaviamo:
$$\sum_{m \geq 1} G_{2m} = 2 \sum_{m \geq 1} B_{2m} - \sum_{m \geq 1} 2^{2m+1} B_{2m} \tag{7.06}$$

Tenendo presente la (5.03), ed applicando la (3.04), ricaviamo:

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 1} 2^{2m+1} B_{2m} &= \sum_{m \geq 1} 2^{2m+1} (-1)^{m-1} \pi^{-2m} \int_0^\infty \frac{x^{2m}}{(\sinh x)^2} dx = 2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty \left(\frac{x}{\sinh x}\right)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{\pi}\right)^2} dx = \\ &= 8 \int_0^\infty \left(\frac{x}{\sinh x}\right)^2 \frac{1}{\pi^2 + 4x^2} dx = \left(x = \frac{y}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{y^2}{\left(\sinh \frac{y}{2}\right)^2 \pi^2 + y^2} dy \end{aligned}$$

Nell'Appendice B -punto 5.0) abbiamo calcolato l'Integrale $L = \int_0^\infty \frac{y^2}{\left(\sinh \frac{y}{2}\right)^2 \pi^2 + y^2} dy$

applicando il teorema dei "Residui", più precisamente il 2° teorema integrale di Cauchy, ed abbiamo ottenuto il seguente risultato:

$$L = \int_0^\infty \frac{y^2}{\left(\sinh \frac{y}{2}\right)^2 \pi^2 + y^2} dy = \frac{\pi^2}{2} - 4 \tag{7.07}$$

Pertanto, dalla (7.06) abbiamo:
$$\sum_{m \geq 1} G_{2m} = 2 \sum_{m \geq 1} B_{2m} - \left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right) \tag{7.08}$$

Tenendo presente la (7.05), dalla (7.08)

ricaviamo:
$$2 \sum_{m \geq 1} B_{2m} = \left(1 - \frac{\pi^2}{6}\right) + \left(\frac{\pi^2}{2} - 4\right) = \frac{\pi^2}{3} - 3,$$

da cui
$$\sum_{m \geq 1} B_{2m} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{2} \quad (7.09)$$

che è perfettamente identica alla (5.02).

La relazione (7.04) e l'integrale che figura nell a (7.07) li abbiamo ottenuti utilizzando serie divergenti.

Pertanto, è da ritenere valido, anche in questo caso, il procedimento seguito.

7.01 Ponendo, nella (7.01), $x = iz$, otteniamo:
$$\frac{2iz}{e^{iz} + 1} = \sum_{m \geq 0} G_m \frac{(iz)^m}{m!} \quad (7.10)$$

cioè:
$$2iz \frac{\cos z + 1 - i \sin z}{(\cos z + 1)^2 + (\sin z)^2} = iz + \frac{z \sin z}{\cos z + 1} = \sum_{m \geq 0} G_{2m} \frac{z^{2m} (-1)^m}{(2m)!} + iz \quad (7.11)$$

Uguagliando le parti reali della (7.11), ricaviamo:

$$\begin{aligned} \frac{z \sin z}{\cos z + 1} &= \sum_{m \geq 0} G_{2m} \frac{z^{2m} (-1)^m}{(2m)!} = \sum_{m \geq 0} G_{4m} \frac{z^{4m}}{(4m)!} - \sum_{m \geq 0} G_{4m+2} \frac{z^{4m+2}}{(4m+2)!} = \\ &= \sum_{m \geq 0} G_{4m} \frac{z^{4m}}{(4m)!} + \sum_{m \geq 0} |G_{4m+2}| \frac{z^{4m+2}}{(4m+2)!} \end{aligned}$$

Per $z = \frac{\pi}{2}$, otteniamo:
$$\sum_{m \geq 0} [G_{4m} \frac{1}{(4m)!} (\frac{\pi}{2})^{4m} + |G_{4m+2}| \frac{1}{(4m+2)!} (\frac{\pi}{2})^{4m+2}] = \frac{\pi}{2} \quad (7.12)$$

La serie del 1° m embro della (7.12), costituisce una serie, rappresentata da $\frac{\pi}{2}$.

La (7.10), per $z \geq \pi$, è una serie divergente, per cui, applicando, alla (7.10), l'integrazione di cui al punto 3.01, ricaviamo:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-z} \frac{2iz}{e^{iz} + 1} dz &= \sum_{m \geq 0} G_m \frac{(i)^m}{m!} \int_0^\infty z^m e^{-z} dz, \text{ da cui:} \\ \int_0^\infty e^{-z} \frac{2iz}{e^{iz} + 1} dz &= 2i \sum_{k \geq 0} (-1)^k \int_0^\infty z e^{-z(1+ik)} dz = 2i \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{1}{(1+ik)^2} = 2i \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{(1-ik)^2}{(1+k^2)^2} = \\ &= 2i \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{1-k^2}{(1+k^2)^2} + \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{4k}{(1+k^2)^2} \end{aligned}$$

$$\sum_{m \geq 0} G_m \frac{(i)^m}{m!} \int_0^\infty z^m e^{-z} dz = \sum_{m \geq 0} G_m (i)^m = \sum_{m \geq 0} G_{2m} (-1)^m + i = 1 + \sum_{m \geq 1} (G_{4m} - G_{4m-2}) + i$$

Uguagliando le parti reali dei risultati delle due precedenti relazioni, otteniamo:

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{m \geq 1} (G_{4m} - G_{4m-2}) &= \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{4k}{(1+k^2)^2}, \quad \text{da cui} \\ \sum_{m \geq 1} (G_{4m} + |G_{4m-2}|) &= \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{4k}{(1+k^2)^2} - 1 = -0,236575 \quad (7.13) \end{aligned}$$

Abbiamo verificato che la parte immaginaria dell'integrale $\int_0^\infty e^{-z} \frac{2iz}{e^{iz} + 1} dz$ è uguale ad i ,

mentre la parte reale dello stesso integrale è uguale a $(1 - 0,236575)$.

Il 1° membro della (7.13) costituisce una serie divergente, rappresentata dal valore $-0,236575$.

7.02 Sostituendo, nella (7.01), $-x$ ad x , abbiamo:
$$\frac{-2x}{e^{-x} + 1} = \sum_{k \geq 0} G_k \frac{(-x)^k}{k!} \quad (7.14)$$

La (7.14), per $x \geq \pi$, è una serie divergente, per cui, applicando, alla (7.14), l'integrazione di cui al punto **3.01**, troviamo:

:

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{-2x}{e^{-x} + 1} dx = \sum_{m \geq 0} G_m \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty x^m e^{-x} dx, \text{ da cui}$$

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{-2x}{e^{-x} + 1} dx = -2 \sum_{k \geq 0} (-1)^k \int_0^\infty x e^{-x(1+k)} dx = -2 \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{1}{(1+k)^2} = -\frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{m \geq 0} G_m \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^\infty x^m e^{-x} dx = \sum_{m \geq 0} G_m (-1)^m = -1 + \sum_{m \geq 1} G_{2m}$$

Uguagliando i risultati delle due precedenti relazioni, troviamo:

$$\sum_{m \geq 1} G_{2m} = 1 - \frac{\pi^2}{6} \quad (7.15)$$

Ritroviamo, così, la (7.05).

7.03 Sostituendo nella (7.01), $x = py$, con $p > 0$,

otteniamo:

$$\frac{2py}{e^{py} + 1} = \sum_{k \geq 0} G_k \frac{(py)^k}{k!} \quad (7.16)$$

Operando sui due membri della (7.16), abbiamo:

$$2py \sum_{k \geq 0} (-1)^k e^{-py(1+k)} = \sum_{k \geq 0} G_k \frac{p^k y^k}{k!} \quad (7.17)$$

Moltiplicando, per $e^{y(p-1)}$, ambo i membri della (7.17), troviamo:

$$2p \sum_{k \geq 0} (-1)^k y e^{-y(1+pk)} = \sum_{k \geq 0} G_k \frac{p^k y^k e^{y(p-1)}}{k!} \quad (7.18)$$

Derivando, n volte, rispetto ad y , i due membri della (7.18), ricaviamo:

$$2p \sum_{k \geq 0} (-1)^k \sum_{j \geq 0} \binom{n}{j} y^{(j)} [e^{-y(1+pk)}]^{(n-j)} = \sum_{k \geq 0} G_k \frac{p^k}{k!} \sum_{j \geq 0} \binom{n}{j} (y^k)^{(j)} [e^{y(p-1)}]^{(n-j)} \quad (7.19)$$

Ponendo, nella (7.19), $y=0$, e tenendo presente quanto precisato nel punto **4.00**, 7° capoverso,

ricaviamo:

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k (1+pk)^{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2pn} \sum_{k \geq 0} G_k p^k \binom{n}{k} (p-1)^{n-k} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} (p-1)^{n-1}}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{2pn} \sum_{k \geq 1} G_{2k} p^{2k} \binom{n}{2k} (p-1)^{n-2k} \quad (7.20)$$

Esamineremo vari casi:

a) Caso di $n=2m$ ($m=1, 2, 3, \dots$)

Ponendo, nella (7.20), $n=2m$, ricaviamo:

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k (1 + pk)^{2m-1} = -\frac{(p-1)^{2m-1}}{2} - \frac{1}{4pm} \sum_{k \geq 1} G_{2k} p^{2k} \binom{2m}{2k} (p-1)^{2m-2k} \quad (7.21)$$

Ponendo, nella (7.21), $p=1$, troviamo:

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k (1+k)^{2m-1} = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} k^{2m-1} = -\frac{1}{4m} G_{2m} = \frac{1}{2m} (2^{2m} - 1) B_{2m} \quad (7.22)$$

Ritroviamo, così, la (4.11b)

Dalla (7.21), per $p=2$, ricaviamo:

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k (1+2k)^{2m-1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{8m} \sum_{k \geq 1} G_{2k} 2^{2k} \binom{2m}{2k} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4m} \sum_{k \geq 1} B_{2k} 2^{2k} (2^{2k} - 1) \binom{2m}{2k} \quad (7.23)$$

Poichè il 1° membro della (7.23) è uguale a zero, come risulta dalla (6.14), dalla medesima (7.23), ricaviamo:

$$\sum_{k \geq 1} G_{2k} 2^{2k} \binom{2m}{2k} = -4m \quad (7.24)$$

La precedente relazione (7.24) consente di calcolare i numeri di Genocchi.

Nell'ultimo passaggio della (7.23) abbiamo utilizzato la (7.02).

Per $m=1$, dalla (7.23), ricaviamo:

$$1 - 3 + 5 - 7 + \dots = -\frac{1}{2} + \frac{4}{4 \cdot 6} (3) = 0 \quad (7.24a)$$

b) Caso di $n=2m+1$

Ponendo, nella (7.20), $n = 2m+1$, abbiamo:

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k (1 + pk)^{2m} = \frac{(p-1)^{2m}}{2} + \frac{1}{2p(2m+1)} \sum_{k \geq 1} G_{2k} p^{2k} \binom{2m+1}{2k} (p-1)^{2m+1-2k} \quad (7.25)$$

Ponendo, nella (7.25), $p=1$, abbiamo:

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k (1+k)^{2m} = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} k^{2m} = 0 \quad (7.26)$$

Ritroviamo, così, la (4.11a)

Per $p=2$, dalla (7.25) ricaviamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} (-1)^k (1+2k)^{2m} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4(2m+1)} \sum_{k \geq 1} G_{2k} 2^{2k} \binom{2m+1}{2k} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2m+1)} \sum_{k \geq 1} B_{2k} 2^{2k} (2^{2k} - 1) \binom{2m+1}{2k} \end{aligned} \quad (7.27)$$

Poiché il 1° membro della (7.27) è uguale a $\frac{1}{2}E_{2m}$, come risulta dalla (6.13), dalla medesima (7.27) ricaviamo:

$$\sum_{k \geq 1} G_{2k} 2^{2k} \binom{2m+1}{2k} = 2(2m+1)(E_{2m} - 1) \tag{7.27.a}$$

La (7.27a) collega i numeri di Eulero con i numeri di Genocchi. Nell'ultimo passaggio della (7.27) abbiamo utilizzato la (7.02).

7.04 Consideriamo l'espressione seguente:

$$\frac{x}{e^x - 1} \frac{2x}{e^x + 1} = x \frac{2x}{e^{2x} - 1} \tag{7.28}$$

Ricordando la (4.03) e la (7.01), abbiamo:

$$\left(\sum_{k \geq 0} B_k \frac{x^k}{k!}\right) \left(\sum_{m \geq 0} G_m \frac{x^m}{m!}\right) = \sum_{h \geq 0} B_h \frac{2^h x^{h+1}}{h!} \tag{7.29}$$

Derivando, n+1 volte, rispetto a x, i due membri della (7.29), e ponendo dopo, x=0,

troviamo: $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_k G_{n+1-k} = B_n 2^n (n+1), \quad n > 0. \tag{7.30}$

Per n=2m, (m=1, 2,...), $\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} B_k G_{2m+1-k} = B_{2m} 2^{2m} (2m+1) \tag{7.31}$

da cui $(2m+1)B_1 G_{2m} + \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k} B_{2k} G_{2m+1-2k} = B_{2m} 2^{2m} (2m+1) \tag{7.32}$

Poiché $G_{2m+1} = 0$, la precedente relazione (7.32), si riduce a:

$$(2m+1)B_1 G_{2m} + (2m+1)B_{2m} G_1 = B_{2m} 2^{2m} (2m+1)$$

da cui $-\frac{1}{2}G_{2m} + B_{2m} = B_{2m} 2^{2m}$

cioè: $G_{2m} = 2(1 - 2^{2m})B_{2m}$

Ritroviamo, così, la (7.02)

Osserviamo che la precedente relazione è valida anche per m=0

Per $n = 2m - 1$, dalla (7.30) ricaviamo:

$$\sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} B_k G_{2m-k} = B_{2m-1} 2^{2m-1} (2m) \tag{7.33}$$

Per m>1, abbiamo:

$$\sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k} B_{2k} G_{2m-2k} = 0 \tag{7.34}$$

La (7.34) rappresenta un'altra relazione che lega i numeri di Genocchi ai numeri di Bernoulli

8.00 Sui numeri di Catalan

(Eugène Charles **Catalan**, nato a Bruges, Belgio, nel 1814, morto a Liegi nel 1894)

Consideriamo la serie
$$\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{2k}{k} x^k \quad (8.01)$$

La serie (8.01) è una serie convergente per $|x| < \frac{1}{4}$, ed è divergente per $|x| \geq \frac{1}{4}$.

I valori assoluti dei coefficienti delle potenze della serie (8.01) rappresentano i ben noti numeri di Catalan, di cui i primi valori, per $k=0, 1, 2, 3, \dots$, sono dati da: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, ...

Dalla (8.01), ricaviamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{2k}{k} x^k &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} \frac{\Gamma(2k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1)} x^k = \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1)} x^k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \sum_{k \geq 0} \frac{(-4)^k \Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(k+2)} x^k = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k \geq 0} (-4)^k x^k \int_0^1 t^{k+\frac{1}{2}-1} (1-t)^{\frac{3}{2}-1} dt \end{aligned} \quad (8.02)$$

Applicando la (3.04) alla (8.02), ricaviamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{2k}{k} x^k &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}-1} (1-t)^{\frac{3}{2}-1} \frac{1}{1+4xt} dt = \left(t = \frac{y}{1+y}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}-1}}{1+y} \frac{dy}{1+y+4xy} = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty y^{\frac{1}{2}-1} \left(\frac{1}{1+y} - \frac{1+4x}{1+y+4xy} \right) \frac{dy}{-4x} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{-4x} \pi \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^{-1} + \frac{2}{\pi} \frac{1+4x}{-4x} \int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}-1}}{1+y(1+4x)} dy = \\ &= \frac{1}{-2x} + \frac{2}{\pi} \frac{1+4x}{4x} \frac{1}{\sqrt{1+4x}} \pi \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^{-1} = \frac{\sqrt{1+4x}-1}{2x}, \quad \text{cioè:} \end{aligned}$$

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{2k}{k} x^k = \frac{\sqrt{1+4x}-1}{2x} \quad (8.03)$$

Ricordiamo che:

$$\int_0^\infty \frac{y^{\frac{1}{2}-1}}{1+y} dy = \pi \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^{-1}$$

Pertanto, la serie (8.01), per $4x \geq 1$, è una serie divergente, rappresentata da $\frac{\sqrt{1+4x}-1}{2x}$

Per i numeri di Catalan, è valida la relazione ricorrente $C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}$, $n \geq 2$

La relazione $C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}$ è dovuta al matematico Segner.

I numeri di Catalan risolvono molti problemi di matematica discreta .

$$\text{Dalla (8.03), per } x=1, \text{ abbiamo: } \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{2k}{k} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (8.03a)$$

Il 1° membro della (8.03a) costituisce una serie divergente, rappresentata da: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Il valore $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ rappresenta la sezione aurea di un segmento di lunghezza unitaria.

Moltiplicando, per x , ambo i membri della (8.03), e derivando rispetto ad x , otteniamo:

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{2k}{k} x^k = \frac{1}{\sqrt{1+4x}} \quad (8.04)$$

Ora, il 1° membro della (8.04), per $4x \geq 1$, costituisce una serie divergente e, per cui., applicando, alla (8.04), l'integrazione di cui al punto **3.01**, abbiamo:

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{2k}{k} \int_0^{\infty} x^k e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{1+4x}} = -\frac{1}{2} + e^{\frac{1}{4}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - 2 \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{2^{-(2k+3)}}{2k+3} \right], \text{ cioè}$$

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{2k}{k} k! = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{(2k)!}{k!} = -\frac{1}{2} + e^{\frac{1}{4}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - 2 \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{2^{-(2k+3)}}{2k+3} \right] \quad (8.05)$$

Il 1° membro della (8.05) costituisce una serie divergente, rappresentata dal valore dell'ultimo membro della (8.05), che è uguale a: 0,545641.

Il calcolo dell'integrale $M = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{1+4x}}$ l'abbiamo riportato nell'Appendice B, punto 5.1).

9.00 Sui numeri di Stirling di seconda specie.

(James **Stirling**, scozzese, nato a Garden (Stirlingshire) nel 1692, morto a Edimburgo il 5 dicembre 1770)

Il numero di Stirling di seconda specie, $S(n,k)$, rappresenta il numero di raggruppamenti di n oggetti distinti in esattamente k gruppi (vedasi Testo [11] a pag. 79).

$$\text{Essi derivano dalla serie: } \frac{(e^x - 1)^k}{k!} = \sum_{n \geq k} S(n,k) \frac{x^n}{n!} \quad (9.01)$$

Derivando, n volte, rispetto a x , e ponendo

$$\text{dopo, } x=0, \text{ troviamo: } S(n,k) = \left[\frac{(e^x - 1)^k}{k!} \right]_{x=0}^{(n)}$$

dove con $S(n,k)$ vengono indicati i numeri di Stirling di seconda specie.

Per ogni k intero non negativo, $n \geq k$, detti numeri sono tutti numeri interi positivi.

I primi numeri $S(n,k)$ sono forniti dalla tabella seguente, che costituisce il Triangolo

di Stirling di seconda specie:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 3 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 7 & 6 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1
 \end{array}$$

9.01 Sostituendo, nella (9.01), $-x$ ad x ,

abbiamo:
$$\frac{(e^{-x} - 1)^k}{k!} = \sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{(-x)^n}{n!} \tag{9.02}$$

Per $x > 1$, la serie al 2° membro della (9.02) è divergente, per cui, applicando, alla (9.02), l'integrazione di cui

al punto **3.01**, otteniamo:
$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{(e^{-x} - 1)^k}{k!} dx = \sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \tag{9.03}$$

Operando sui due membri della (9.03), ricaviamo:
$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{(e^{-x} - 1)^k}{k!} dx = - \int_0^\infty \frac{(e^{-x} - 1)^k}{k!} de^{-x} =$$

$$= (e^{-x} = y) = - \int_1^0 \frac{(y-1)^k}{k!} dy = - \frac{(-1)^{k+1}}{k!(k+1)} = \frac{(-1)^k}{(k+1)!}$$

$$\sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \sum_{n \geq k} S(n, k) (-1)^n$$

Uguagliando i risultati delle due ultime

relazioni, ricaviamo:
$$\sum_{n \geq k} S(n, k) (-1)^n = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \tag{9.04}$$

Per $k=1$, troviamo:
$$\sum_{n \geq 1} S(n, 1) (-1)^n = -\frac{1}{2}$$

Poiché $S(n, 1) = 1$ per qualsiasi n intero positivo, dalla precedente

relazione, **ancora una volta, otteniamo la (2.03)**, cioè:
$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

La serie indicata al 1° membro della (9.04), per ogni valore di k intero positivo, costituisce una serie divergente, rappresentata dal valore del 2° membro della medesima (9.04), che dipende solamente da k . Osserviamo che $S(n, 0) = 0$, $S(0, 0) = 1$.

9.02 Ponendo, nella (9.01), $x=iz$,

otteniamo:
$$\frac{(e^{iz} - 1)^k}{k!} = \sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{(iz)^n}{n!} \tag{9.05}$$

La serie del 2° membro della (9.05), per $z > 1$, è divergente, e quindi, applicando, alla (9.05), l'integrazione di cui al punto **3.01**, abbiamo:

$$\int_0^\infty e^{-z} \frac{(e^{iz} - 1)^k}{k!} dz = \sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{(i)^n}{n!} \int_0^\infty z^n e^{-z} dz$$

Operando sui due membri della precedente relazione, ricaviamo:

$$\int_0^\infty e^{-z} \frac{(e^{iz} - 1)^k}{k!} dz = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^k}{k!} \binom{k}{j} (-1)^j \int_0^\infty e^{-z+izj} dz = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^k}{k!} \binom{k}{j} \frac{(-1)^j}{1-ij} =$$

$$= \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^k}{k!} \binom{k}{j} \frac{(-1)^j}{1+j^2} + i \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^k}{k!} \binom{k}{j} \frac{j(-1)^j}{1+j^2};$$

$$\sum_{n \geq k} S(n, k) i^n = \sum_{n \geq k} S(2n, k) (-1)^n - i \sum_{n \geq k} S(2n-1, k) (-1)^n$$

Uguagliando le parti reali e quelle immaginarie delle due precedenti relazioni, abbiamo:

$$\sum_{n \geq k} S(2n, k) (-1)^n = \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{(-1)^j}{1+j^2} \tag{9.06}$$

$$\sum_{n \geq k} S(2n-1, k) (-1)^n = - \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^k}{k!} \binom{k}{j} \frac{j(-1)^j}{1+j^2} \tag{9.07}$$

I primi membri delle (9.06) e (9.07) costituiscono, per ogni k intero positivo, serie divergenti, rappresentate, rispettivamente, dal valore finito dei secondi membri delle predette (9.06) e (9.07).

Per k=1, essendo S(2n,1) = 1, e S(2n-1,1) = 1,

dalle (9.06) e (9.07) ricaviamo:
$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

Ritroviamo, così, ancora una volta, la (2.03).

10.00 Sui numeri di Stirling di prima specie.

Il numero di Stirling di prima specie, o numero dei cicli di Stirling, s(n,k) , rappresenta il numero di permutazioni di n oggetti che hanno esattamente k cicli (vedasi Testo [11] a pag. 80).

Essi derivano dalla serie:
$$\frac{[\ln(1+x)]^k}{k!} = \sum_{n \geq k} s(n, k) \frac{x^n}{n!} \tag{10.01}$$

dove con s(n,k) vengono indicati i numeri di Stirling di prima specie. Derivando, n volte, rispetto ad x, ambo i membri

della (10.01), e ponendo dopo, x=0, abbiamo:
$$s(n, k) = \frac{[\ln^k(1+x)]_{x=0}^{(n)}}{k!}$$

Per k=1, troviamo:
$$s(n, 1) = [(1+x)^{-1}]_{x=0}^{(n-1)} = \frac{\Gamma(n)(-1)^{n-1}}{\Gamma(1)} = (-1)^{n-1} (n-1)! \tag{10.02}$$

I primi numeri de Stirling di prima specie sono forniti dalla tabella seguente, che rappresenta Il Triangolo di Stirling di prima specie:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ -1 & 1 & & & & & \\ 2 & -3 & 1 & & & & \\ -6 & 11 & -6 & 1 & & & \\ 24 & -50 & 35 & -10 & 1 & & \end{array}$$

Per ogni k intero positivo, i valori di $s(n,k)$, $n \geq k$, sono numeri interi a segni alterni.

Per $x > 1$, la serie al 2° membro della (10.01) risulta divergente, per cui, applicando, alla (10.01), l'integrazione di cui

al punto **3.01**, abbiamo:
$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{[\ln(1+x)]^k}{k!} dx = \sum_{n \geq k} s(n,k) \frac{1}{n!} \int_0^\infty x^n e^{-x} dx,$$

da cui ricaviamo:
$$\sum_{n \geq k} s(n,k) = \int_0^\infty e^{-x} \frac{[\ln(1+x)]^k}{k!} dx \tag{10.03}$$

Ponendo, nell'integrale indicato nel 2° membro della (10.03), $1+x = e^y$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} \frac{[\ln(1+x)]^k}{k!} dx &= \frac{1}{k!} \int_0^\infty y^k e^{-(e^y-1)} e^y dy = \frac{e}{k!} \sum_{h \geq 0} (-1)^h \frac{1}{h!} \int_0^\infty y^k e^{yh+2y} e^{-y} dy = \\ &= \frac{e}{k!} \sum_{h \geq 0} (-1)^h \frac{1}{h!} \sum_{v \geq 0} \frac{(h+2)^v}{v!} \int_0^\infty y^k y^v e^{-y} dy = \frac{e}{k!} \sum_{h \geq 0} (-1)^h \frac{1}{h!} \sum_{v \geq 0} \frac{(h+2)^v}{v!} (k+v)! = \\ &= e \sum_{h \geq 0} \frac{(-1)^h}{h!} \sum_{v \geq 0} (h+2)^v \binom{k+v}{k}, \text{ cioè:} \\ \int_0^\infty e^{-x} \frac{[\ln(1+x)]^k}{k!} dx &= e \sum_{h \geq 0} \frac{(-1)^h}{h!} \sum_{v \geq 0} (h+2)^v \binom{k+v}{k}; \text{ pertanto:} \\ \sum_{n \geq k} s(n,k) &= e \sum_{h \geq 0} \frac{(-1)^h}{h!} \sum_{v \geq 0} (h+2)^v \binom{k+v}{k} \end{aligned} \tag{10.04}$$

La serie indicata al 1° membro della (10.04) costituisce, per ogni k intero positivo, una serie divergente, rappresentata dal valore finito del 2° membro.

L'integrale $\int_0^\infty e^{-x} \frac{[\ln(1+x)]^k}{k!} dx$ lo possiamo calcolare anche nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} \frac{[\ln(1+x)]^k}{k!} dx &= \frac{1}{k!} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_\varepsilon^{(k)} \int_0^\infty (1+x)^\varepsilon e^{-x} dx = (1+x=y) = \\ &= \frac{1}{k!} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_\varepsilon^{(k)} \int_1^\infty (y)^\varepsilon e^{-(y-1)} dy = \frac{1}{k!} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_\varepsilon^{(k)} \left[\int_0^\infty (y)^\varepsilon e^{-(y-1)} dy - \int_0^1 y^\varepsilon e^{-y+1} dy \right] = \\ &= \frac{e}{k!} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_\varepsilon^{(k)} \left[\Gamma(\varepsilon+1) - \sum_{h \geq 0} \frac{(-1)^h}{h!} \frac{1}{\varepsilon+h+1} \right] = \frac{e}{k!} \left[\Gamma^{(k)}(1) - \sum_{h \geq 0} \frac{k!}{h!} \frac{(-1)^{h+k}}{(h+1)^{k+1}} \right] \end{aligned}$$

Quindi:
$$\sum_{n \geq k} s(n,k) = \frac{e}{k!} \left[\Gamma^{(k)}(1) + (-1)^k e \sum_{h \geq 1} \frac{1}{h!} \frac{(-1)^h}{h^k} \right] \tag{10.05}$$

Il 2° membro della (10.05) rappresenta una formula che ci indica, in modo più evidente, che essa fornisce, per ogni k intero positivo, un valore finito.

Per k=1, dalla (10.05) ricaviamo:

$$\sum_{n \geq 1} s(n,1) = e[\Gamma'(1) - \sum_{h \geq 1} \frac{(-1)^h}{h!h}] = -e[\gamma + \sum_{h \geq 1} \frac{(-1)^h}{h!h}]$$

Tenendo presente la (3.08), rileviamo che:

$$\sum_{n \geq 1} s(n,1) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k k!$$

Confrontando la (10.04) con la (10.05), otteniamo:

$$\Gamma^{(k)}(1) = k! \left[\sum_{h \geq 0} \frac{(-1)^h}{h!} \sum_{v \geq 0} (h+2)^v \binom{k+v}{k} - \sum_{h \geq 1} \frac{1}{h!} \frac{(-1)^{h+k}}{h^k} \right] \quad (10.06)$$

Nell'Appendice B, punto 7.0), abbiamo indicato un modo per calcolare il valore di $\Gamma^{(k)}(1)$, utilizzando la formula seguente:

$$\Gamma^{(k)}(1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\Gamma(1+\varepsilon)\Psi(1+\varepsilon)]^{k-1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \Gamma^{(j)}(1+\varepsilon)\Psi^{(k-1-j)}(1+\varepsilon),$$

dove $\Gamma'(1+\varepsilon) = \Gamma(1+\varepsilon)\Psi(1+\varepsilon)$, e, $\Psi(1+\varepsilon) = \int_0^1 \frac{t^\varepsilon - 1}{t-1} dt - \gamma$

Dalla (10.02), otteniamo:

$$\sum_{n \geq 1} s(n,1) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n n! = \int_0^\infty e^{-x} \ln(1+x) dx = -e \left(\tilde{a} + \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k!k} \right) = 0,596347 \quad (10.07)$$

La serie indicata al 1° membro della (10.07) costituisce una serie divergente, rappresentata dall'integrale che figura nel 3° membro della (10.07), il cui valore è 0,596347, come si rileva dalla (3.08).

Per k=0, dalla (10.06)

abbiamo:

$$\begin{aligned} \sum_{h \geq 0} \frac{(-1)^h}{h!} \sum_{v \geq 0} (h+2)^v &= \sum_{h \geq 0} \frac{(-1)^h}{h!} \sum_{v \geq 0} (h+2)^v \frac{1}{v!} \int_0^\infty t^v e^{-t} dt = \\ &= \sum_{h \geq 0} \frac{(-1)^h}{h!} \int_0^\infty e^{-t} e^{t(h+2)} dt = \int_0^\infty e^t e^{-e^t} dt = e^{-1}; \\ \sum_{h \geq 0} \frac{1}{h!} \frac{(-1)^h}{(h+1)} &= \sum_{h \geq 1} \frac{(-1)^{h-1}}{h!} = -(e^{-1} - 1) \end{aligned}$$

Sommando i risultati della ultime due relazioni, otteniamo il risultato finale che è uguale ad 1, come era da aspettarsi.

10.01 Ponendo, nella (10.01), k=1, x = iz,

otteniamo:

$$\ln(1+iz) = \sum_{n \geq 1} s(n,1) \frac{(iz)^n}{n!}, \text{ cioè}$$

$$\frac{1}{2} \ln(1+z^2) + i \arctan z = \sum_{n \geq 1} s(2n,1)(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)} - i \sum_{n \geq 1} s(2n-1,1)(-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)}$$

Uguagliando le parti reali e quelle immaginarie della precedente relazione, ricaviamo:

$$\sum_{n \geq 1} s(2n,1)(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)} = \frac{1}{2} \ln(1+z^2) \tag{10.08}$$

$$\sum_{n \geq 1} s(2n-1,1)(-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)} = \arctan z \tag{10.09}$$

Per $z > 1$, le serie indicate al 1° membro delle (10.08) e (10.09) sono serie divergenti, per cui, applicando, alle predette relazioni, l'integrazione di cui al punto **3.01**, abbiamo:

$$\sum_{n \geq 1} s(2n,1)(-1)^n = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-z} \ln(1+z^2) dz \tag{10.10}$$

$$\sum_{n \geq 1} s(2n-1,1)(-1)^{n-1} = \int_0^\infty e^{-z} \arctan z dz \tag{10.11}$$

Sviluppando i calcoli degli integrali delle due relazioni precedenti, abbiamo;

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-z} \ln(1+z^2) dz = \int_0^\infty \frac{ze^{-z}}{1+z^2} dz = \sum_{k \geq 0} (-1)^k (2k+1)! = 0,343378$$

$$\int_0^\infty e^{-z} \arctan z dz = \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{1+z^2} dz = \sum_{k \geq 0} (-1)^k (2k)! = 0,62145$$

Dalle relazioni precedenti si evince, chiaramente, che le serie indicate nei primi membri delle (10.10) e (10.11) sono serie divergenti, rappresentate, rispettivamente, dagli integrali indicati nei secondi membri delle medesime relazioni, i cui valori numerici sono, rispettivamente, 0,343378 e 0,62145.

11.00 Sui numeri di Bell (Eric Temple **Bell**, nato a Peterhead, Aberdeen, Scozia, il 07.02.1883, morto a Watsonville, California, il 21.12.1960).

Il numero di Bell rappresenta il numero totale dei modi di disporre n oggetti in gruppi (vedasi Testo [11] a pag. 80).

I numeri di Bell derivano dalla serie
$$e^{e^x-1} = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} \tag{11.01}$$

dove i numeri b_n indicano i numeri di Bell. I primi valori dei numeri di Bell, per $n=1,2,3,\dots$, sono dati da: 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, ...

I numeri b_n sono tutti interi positivi, e definiti dalle relazioni seguenti:

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k; \quad b_n = \sum_{k=0}^n S(n,k), \quad b_0 = 1 \tag{11.02}$$

(vedasi Testo [10], a pag. 210).

Dalla (11.01), ricaviamo:

$$e^{-1} \sum_{k \geq 0} \frac{e^{kx}}{k!} = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}$$

Derivando, n volte, rispetto ad x, i due membri della relazione precedente, e ponendo

dopo, $x=0$, otteniamo:

$$b_n = e^{-1} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!} \quad (\text{formula di Dobinski})$$

Alcuni testi indicano i numeri di Bell con la lettera B. Altri testi li indicano con la lettera b.

Noi abbiamo preferito indicarli con la lettera b per distinguerli dai numeri di Bernoulli che, generalmente, vengono indicati con la lettera B.

11.01 Sostituendo nella serie (11.01), $-x$ ad x ,

troviamo la relazione:

$$e^{e^{-x}-1} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n b_n \frac{x^n}{n!} \quad (11.03)$$

La serie (11.01) converge per $|x| < 1$, e diverge per $|x| \geq 1$, per cui, applicando, alla (11.01), l'integrazione di cui al

punto 3.01, abbiamo:

$$\int_0^{\infty} e^{e^{-x}-1} e^{-x} dx = \sum_{n \geq 0} (-1)^n b_n \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

(11.04)

Dal 1° membro della

(11.04), ricaviamo: $\int_0^{\infty} e^{e^{-x}-1} e^{-x} dx = -e^{-1} \int_0^{\infty} e^{e^{-x}} de^{-x} = (e^{-x}=y) = -e^{-1} \int_1^{\infty} e^y dy = 1 - e^{-1}$

Dal 2° membro della (11.04), otteniamo $\sum_{n \geq 0} (-1)^n b_n \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \sum_{n \geq 0} (-1)^n b_n$;

quindi :

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n b_n = 1 - e^{-1} \quad (11.05)$$

La serie indicata al 1° membro della (11.05) è, chiaramente, una serie divergente,

ma è rappresentata dal valore $1 - e^{-1}$

Dal 1° membro della (11.05), ricaviamo: $\sum_{n \geq 0} (-1)^n b_n = 1 + \sum_{n \geq 1} (b_{2n} - b_{2n-1})$

da cui $\sum_{n \geq 1} (b_{2n} - b_{2n-1}) = -e^{-1}$ (11.06)

Il 1° membro della (11.06), costituisce una serie divergente, rappresentata dal valore $(-e^{-1})$.

11.02 Ponendo, nella (11.01),

$x = iz$, troviamo:

$$e^{-1} e^{e^{iz}} = e^{-1} \sum_{k \geq 0} \frac{e^{ikz}}{k!} = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{(iz)^n}{n!} \quad (11.07)$$

La serie indicata nell'ultimo membro della (11.07), per $z > 1$, è divergente, per cui, applicando, alla (11.07), l'integrazione di cui al punto 3.01, abbiamo:

$$e^{-1} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \int_0^{\infty} e^{-z} e^{ikz} dz = \sum_{n \geq 0} b_n \int_0^{\infty} e^{-z} \frac{(iz)^n}{n!} dz, \text{ da cui}$$

$$e^{-1} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \int_0^{\infty} e^{-z} e^{ikz} dz = e^{-1} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{1}{1-ik} = e^{-1} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{1+ik}{1+k^2} =$$

$$= e^{-1} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{1}{1+k^2} + ie^{-1} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{k}{1+k^2}; \quad (11.08)$$

$$\sum_{n \geq 0} b_n \int_0^{\infty} e^{-z} \frac{(iz)^n}{n!} dz = \sum_{n \geq 0} b_n (i)^n = \sum_{n \geq 0} b_{2n} (-1)^n - i \sum_{n \geq 1} b_{2n-1} (-1)^n \quad (11.09)$$

Uguagliando le parti reali e quelle immaginarie degli ultimi membri delle relazioni (11.08) e (11.09), otteniamo:

$$\sum_{n \geq 0} b_{2n} (-1)^n = e^{-1} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{1}{1+k^2} \quad (11.10)$$

$$\sum_{n \geq 1} b_{2n-1} (-1)^n = -e^{-1} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{k}{1+k^2}; \quad (11.11)$$

cioè: $\sum_{n \geq 0} b_{2n} (-1)^n = \sum_{n \geq 0} b_{4n} - \sum_{n \geq 0} b_{4n+2} = 1 + \sum_{n \geq 1} b_{4n} - \sum_{n \geq 1} b_{4n-2} = e^{-1} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{1}{1+k^2}$

$$\sum_{n \geq 1} b_{2n-1} (-1)^n = -1 + \sum_{n \geq 1} b_{4n-1} - \sum_{n \geq 1} b_{4n+1} = -e^{-1} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{k}{1+k^2},$$

da cui: $\sum_{n \geq 1} b_{4n} - \sum_{n \geq 1} b_{4n-2} = e^{-1} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{1}{1+k^2} - 1 = -0,40427$

$$\sum_{n \geq 1} b_{4n+1} - \sum_{n \geq 1} b_{4n-1} = e^{-1} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{k}{1+k^2} - 1 = -0,7198;$$

cioè: $b_4 - b_2 + b_8 - b_6 + \dots = -0,40427 \quad (11.12)$

$$b_5 - b_3 + b_9 - b_7 + \dots = -0,7198 \quad (11.13)$$

Pertanto i primi membri delle (11.12) e (11.13) sono serie divergenti, rappresentate, rispettivamente, dai valori $-0,40427$ e $-0,7198$.

12.00 Sui numeri complementari di Bell

I numeri complementari di Bell derivano

dalla serie
$$e^{1-e^x} = \sum_{n \geq 0} \bar{b}_n \frac{x^n}{n!} \quad (12.01)$$

dove \bar{b}_n rappresentano i numeri complementari di Bell.

La (12.01) è una serie a segni alterni, ma non regolari. I primi valori dei numeri complementari di Bell sono dati da:

$$\bar{b}_0 = 1, \bar{b}_1 = -1, \bar{b}_2 = \frac{1}{3}, \bar{b}_3 = \frac{1}{4}, \bar{b}_4 = -\frac{2}{5}, \bar{b}_5 = -\frac{3}{2}$$

Dalla (12.01) ricaviamo:

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{(e^x - 1)^k}{k!} = \sum_{n \geq 0} \bar{b}_n \frac{x^n}{n!}$$

Derivando, n volte, rispetto ad x, la precedente relazione, e ponendo dopo, x=0,

$$\text{otteniamo la seguente relazione:} \quad \bar{b}_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k S(n, k) \quad (12.02)$$

Per x>1, la serie al secondo membro della (12.01) costituisce una serie divergente, e quindi, applicando, alla (12.01), l'integrazione di cui al punto 3.01, abbiamo:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} e^{1-e^x} dx = (e^x = 1+y) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+y)^2} e^{-y} dy = - \int_0^{\infty} e^{-y} d \frac{1}{1+y} = 1 - \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{1+y} dy$$

Ricordando la (3.07), troviamo:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} e^{1-e^x} dx = 1 + e \left[\gamma + \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k!k} \right] \quad (12.03)$$

$$\sum_{n \geq 0} \bar{b}_n \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \sum_{n \geq 0} \bar{b}_n \quad (12.04)$$

Pertanto:

$$\sum_{n \geq 1} \bar{b}_n = e \left[\gamma + \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k!k} \right] = -0,596347 \quad (12.05)$$

La serie del 1° membro della (12.05) costituisce una serie divergente, rappresentata dal valore del 2° membro della (12.05), che è uguale a -0,596347.

$$\text{Dalla (12.01) ricaviamo:} \quad e \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} e^{kx} = \sum_{n \geq 0} \bar{b}_n \frac{x^n}{n!} \quad (12.06)$$

Derivando, n volte, rispetto a x, ambo i membri

$$\text{della (12.06), e ponendo dopo, x=0, troviamo:} \quad \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k k^n}{k!} = e^{-1} \bar{b}_n \quad (12.07)$$

$$\text{12.01 Sostituendo nella (12.01), -x ad x, troviamo:} \quad e^{-(e^{-x}-1)} = \sum_{n \geq 0} \bar{b}_n \frac{(-x)^n}{n!} \quad (12.08)$$

Per x>1, la serie del 2° membro della (12.08) costituisce una serie divergente, per cui, applicando, alla (12.08), l'integrazione di cui al punto 3.01, abbiamo:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} e^{-(e^{-x}-1)} dx = \sum_{n \geq 0} \bar{b}_n \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx \quad (12.09)$$

Calcolando gli integrali dei due membri della (12.09), troviamo:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} e^{-(e^{-x}-1)} dx = - \int_0^{\infty} e e^{-e^{-x}} de^{-x} = (e^{-x} = y) = -e \int_1^0 e^{-y} dy = e - 1$$

$$\sum_{n \geq 0} \bar{b}_n \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \sum_{n \geq 0} \bar{b}_n (-1)^n$$

Sostituendo il risultato delle due precedenti relazioni

nella (12.09), abbiamo:
$$\sum_{n \geq 0} \bar{b}_n (-1)^n = e - 1, \quad (12.10)$$

cioè
$$1 + \sum_{n \geq 1} \bar{b}_{2n} - \sum_{n \geq 1} \bar{b}_{2n-1} = e - 1, \text{ da cui}$$

$$\sum_{n \geq 1} (\bar{b}_{2n} - \bar{b}_{2n-1}) = e - 2 \quad (12.11)$$

La serie indicata al 1° membro della (12.10), è una serie divergente, rappresentata da (e - 1).

E' evidente che anche il 1° membro della (12.11), f ornisce una serie divergente,

rappresentata dal valore (e - 2).

12.02 Ponendo nella (12.01), x=iz, abbiamo:
$$e^{-(e^z-1)} = \sum_{n \geq 0} \bar{b}_n \frac{(iz)^n}{n!}, \quad \bar{b}_0 = 1, \bar{b}_1 = -1, \quad (12.12)$$

Per z>1, la serie del 2° membro della (12.12), rappresenta una serie divergente, per cui,

applicando, alla (12.12), l'integrazione di cui al punto **3.01**, abbiamo:

$$\int_0^{\infty} e^{-z} e^{-(e^z-1)} dz = \sum_{n \geq 0} \bar{b}_n \frac{(i)^n}{n!} \int_0^{\infty} z^n e^{-z} dz \quad (12.13)$$

Calcolando gli integrali che figurano nella (12.13), ricaviamo:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-z} e^{-(e^z-1)} dz &= e \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^{\infty} e^{-z(1-ik)} dz = e \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{1-ik} = \\ &= e \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{1+k^2} + ie \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{k}{1+k^2} \end{aligned}$$

$$\sum_{n \geq 0} \bar{b}_n \frac{(i)^n}{n!} \int_0^{\infty} z^n e^{-z} dz = \sum_{n \geq 0} \bar{b}_n (i)^n = \sum_{n \geq 0} \bar{b}_{2n} (-1)^n + i \sum_{n \geq 0} \bar{b}_{2n+1} (-1)^n$$

Uguagliando le parti reali e quelle immaginarie delle due precedenti relazioni, troviamo:

$$\sum_{n \geq 0} \bar{b}_{2n} (-1)^n = e \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{1+k^2}$$

$$\sum_{n \geq 0} \bar{b}_{2n+1} (-1)^n = e \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{k}{1+k^2},$$

cioè
$$\sum_{n \geq 1} \bar{b}_{4n} - \sum_{n \geq 1} \bar{b}_{4n-2} = e \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{1+k^2} - 1 = 0,59155 ; \quad (12.14)$$

$$\sum_{n \geq 0} \bar{b}_{2n+1} (-1)^n = - \sum_{n \geq 1} \bar{b}_{2n-1} (-1)^n = \bar{b}_1 + \sum_{n \geq 1} \bar{b}_{4n+1} - \sum_{n \geq 1} \bar{b}_{4n-1} = e \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{k}{1+k^2}$$

Da quest'ultima relazione, ricaviamo:
$$\sum_{n \geq 1} (\bar{b}_{4n+1} - \bar{b}_{4n-1}) = e \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{k}{1+k^2} + 1 = 0,07144. \quad (12.15)$$

Chiaramente, i primi membri delle (12.14) e (12.15) sono serie divergenti, rappresentate, rispettivamente, dai valori 0,59155 e 0,07144.

13.00 Consideriamo la serie:

$$\frac{x}{e^{e^x-1}-1} = \sum_{n \geq 0} \overline{C}_n \frac{x^n}{n!} \quad (13.01)$$

I primi valori di \overline{C}_n sono dati da: $\overline{C}_0 = 1, \overline{C}_1 = -1, \overline{C}_2 = \frac{1}{3}, \overline{C}_3 = \frac{1}{4}, \overline{C}_4 = \frac{4}{15}, \overline{C}_5 = \frac{1}{6}, \overline{C}_6 = -\frac{59}{84}$

La (13.01) è suscettibile di essere trasformata in:

$$\frac{x}{e^{e^x-1}-1} = \frac{x}{e^x-1} \frac{e^x-1}{e^{e^x-1}-1} = \left[\sum_{k \geq 0} B_k \frac{x^k}{k!} \right] \left[\sum_{h \geq 0} B_h \frac{(e^x-1)^h}{h!} \right] = \sum_{n \geq 0} \overline{C}_n \frac{x^n}{n!} \quad (13.02)$$

Derivando, n volte, rispetto ad x, gli ultimi due membri della (13.02), e ponendo dopo, x=0, ricaviamo:

$$\overline{C}_n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j \sum_{h=0}^{n-j} B_h S(n-j, h), \quad n > 0, \quad (13.03)$$

essendo, come è noto, B_j, e, B_h , i numeri di Bernoulli, e, $S(n-j, h)$ i numeri di Stirling di seconda specie.

Per $x > 1$, la serie che figura nell'ultimo membro della (13.02) è divergente, per cui, applicando, alla (13.02), l'integrazione di cui al punto **3.01**, abbiamo:

$$\int_0^{\infty} \frac{x e^{-x}}{e^{e^x-1}-1} dx = (e^x = 1+y) = \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+y)}{e^y-1} \frac{dy}{(1+y)^2} = 0,420552$$

$$\sum_{n \geq 0} \overline{C}_n \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \sum_{n \geq 0} \overline{C}_n$$

Uguagliando i risultati delle precedenti due relazioni, abbiamo: $\sum_{n \geq 0} \overline{C}_n = 0,420552. \quad (13.04)$

La serie che figura al 1° membro della (13.04) costituisce una serie divergente, rappresentata dal valore 0,420552, indicato nel 2° membro della predetta (13.04).

13.01 Sostituendo nella (13.01), -x ad x, ricaviamo:

$$\frac{-x}{e^{e^{-x}-1}-1} = \sum_{n \geq 0} \overline{C}_n \frac{(-x)^n}{n!} \quad (13.05)$$

Per $x > 1$, la serie del 2° membro della (13.05) è divergente, per cui, applicando, alla (13.05), l'integrazione di cui al punto **3.01**, abbiamo:

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \int_1^{\infty} (\ln x)^k e^{-x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k \geq 0} (-1)^k D_{\varepsilon}^{(k)} \int_1^{\infty} x^{\varepsilon} e^{-x} dx = (x=1+y) =$$

$$= e^{-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k \geq 0} (-1)^k D_{\varepsilon}^{(k)} \int_0^{\infty} (1+y)^{\varepsilon} e^{-y} dy \quad (14.03)$$

Calcoliamo l'integrale che figura nell'ultimo membro della (14.03).

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (1+y)^{\varepsilon} e^{-y} dy &= \sum_{h \geq 0} \frac{(-1)^h}{h!} \int_0^{\infty} (1+y)^{\varepsilon} y^h dy = \left(y = \frac{z}{1-z} \right) = \\ &= \sum_{h \geq 0} \frac{(-1)^h}{h!} \int_0^1 \left(\frac{1}{1-z} \right)^{\varepsilon} \left(\frac{z}{1-z} \right)^h \frac{dz}{(1-z)^2} = \sum_{h \geq 0} \frac{(-1)^h}{h!} \int_0^1 (1-z)^{-\varepsilon-h-2} (z)^h dz = \\ &= \sum_{h \geq 0} \frac{(-1)^h}{h!} \frac{\Gamma(h+1)\Gamma(-\varepsilon-h-1)}{\Gamma(-\varepsilon)} = \sum_{h \geq 0} (-1)^h \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{-\pi} \frac{1}{\Gamma(2+h+\varepsilon)} \frac{\pi}{(\sin \pi \varepsilon)(-1)^h} = \\ &= - \sum_{h \geq 0} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\Gamma(2+h+\varepsilon)} = - \sum_{h \geq 0} \frac{1}{(1+h+\varepsilon)(h+\varepsilon)\dots(1+\varepsilon)} \end{aligned} \quad (14.04)$$

Sappiamo che:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+h+\varepsilon)(h+\varepsilon)\dots(1+\varepsilon)} &= \sum_{r=1}^{h+1} \frac{1}{(r+\varepsilon)(h+1-r)!(-1)^{r-1}(r-1)!} = (r=s+1)= \\ &= \sum_{s=0}^h \frac{(-1)^s}{h!} \binom{h}{s} \frac{1}{s+1+\varepsilon} \end{aligned} \quad (14.05)$$

Tenendo presente i risultati delle (14.03), (14.04) e (14.05), ricaviamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} (-1)^k \int_1^{\infty} (\ln x)^k e^{-x} dx &= -e^{-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k \geq 0} (-1)^k \sum_{h \geq 0} \sum_{s=0}^h \frac{(-1)^s}{h!} \binom{h}{s} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1)} (s+1+\varepsilon)^{-1-k} (-1)^k = \\ &= -e^{-1} \sum_{k \geq 0} k! \sum_{h \geq 0} \sum_{s=0}^h \frac{(-1)^s}{h!} \binom{h}{s} \frac{1}{(s+1)^{k+1}} \end{aligned} \quad (14.06)$$

Il valore dell'integrale che figura nel 2° membro della (14.02) è uguale a 0,245857.

Abbiamo cioè:
$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{1 + \ln x} = 0,245857$$

Tenendo presente la (14.06),

troviamo:
$$\sum_{k \geq 0} k! \sum_{h \geq 0} \sum_{s=0}^h \frac{(-1)^s}{h!} \binom{h}{s} \frac{1}{(s+1)^{k+1}} = -e(0,245857) = -0,668307 \quad (14.07)$$

La serie multipla indicata nel 1° membro della (14.07) definisce una serie divergente, rappresentata dal valore numerico uguale a $-0,668307$.

14.01 Consideriamo la serie:

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k (\ln x)^{2k} = \frac{1}{1 + (\ln x)^2} \quad (14.08)$$

Il 2° membro della (14.08) l'abbiamo ottenuto applicando la (3.04).

Il 1° membro della (14.08) è una serie che converge per $e^{-1} < x < e$, e diverge per $0 < x \leq e^{-1}$, e per $x \geq e$. Pertanto, applicando alla (14.08) l'integrale di cui al punto **3.01**, otteniamo una nuova serie divergente, definita da:

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \int_0^{\infty} (\ln x)^{2k} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{1 + (\ln x)^2} \quad (14.09)$$

Operando sui due membri della (14.09), troviamo:

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \int_0^{\infty} (\ln x)^{2k} e^{-x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k \geq 0} (-1)^k D_{\varepsilon}^{(2k)} \int_0^{\infty} x^{\varepsilon} e^{-x} dx = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \Gamma^{(2k)}(1) \quad (14.10)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{1 + (\ln x)^2} = 0,608816 \quad (14.11)$$

Uguagliando il risultato della (14.10) con quello della (14.11), otteniamo :

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \Gamma^{(2k)}(1) = 0,608816 \quad (14.12)$$

Nell'Allegato B, punto 7), abbiamo riportato un procedimento per il calcolo di $\Gamma^{(k)}(1)$.

14.02 Moltiplicando, per $\frac{x^{q-1}}{1+x}$, $0 < \text{Re}(q) < 1$, ambo i membri della (14.08),

ed integrando, rispetto ad x , tra i limiti zero ed infinito, otteniamo un'altra serie divergente, definita da:

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \int_0^{\infty} (\ln x)^{2k} \frac{x^{q-1}}{1+x} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{q-1}}{1+x} \frac{dx}{1+(\ln x)^2} \quad (14.13)$$

Operando, abbiamo:

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \int_0^{\infty} (\ln x)^{2k} \frac{x^{q-1}}{1+x} dx = \sum_{k \geq 0} (-1)^k D_q^{(2k)} \int_0^{\infty} \frac{x^{q-1}}{1+x} dx = \sum_{k \geq 0} (-1)^k D_q^{(2k)} \left(\frac{\pi}{\sin \pi q} \right); \quad (14.14)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{q-1}}{1+x} \frac{dx}{1+(\ln x)^2} = (x = e^z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{qz}}{1+e^z} \frac{dz}{1+z^2} \quad (14.15)$$

Il calcolo dell'integrale indicato nel 2° membro della (14.15), l'abbiamo riportato nell'Appendice B, punto 8), ed abbiamo ottenuto:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{qz}}{1+e^z} \frac{dz}{1+z^2} &= -2\pi \sum_{h \geq 0} \frac{\sin[\pi q(2h+1)]}{\pi^2(2h+1)^2-1} + \frac{\pi}{2} \frac{\cos(\frac{1}{2}-q)}{\cos \frac{1}{2}} + \\ &+ 2i\pi \sum_{h \geq 0} \frac{\cos[\pi q(2h+1)]}{\pi^2(2h+1)^2-1} - \frac{i\pi}{2} \frac{\sin(\frac{1}{2}-q)}{\cos \frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (14.16)$$

Uguagliando il risultato della (14.14) con quello della (14.16), troviamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} (-1)^k D_q^{(2k)} \left(\frac{\pi}{\sin \pi q} \right) &= -2\pi \sum_{h \geq 0} \frac{\sin[\pi q(2h+1)]}{\pi^2(2h+1)^2-1} + \frac{\pi}{2} \frac{\cos(\frac{1}{2}-q)}{\cos \frac{1}{2}} + \\ &+ 2i\pi \sum_{h \geq 0} \frac{\cos[\pi q(2h+1)]}{\pi^2(2h+1)^2-1} - \frac{i\pi}{2} \frac{\sin(\frac{1}{2}-q)}{\cos \frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (14.17)$$

La (14.17) è una relazione molto suggestiva.

Sviluppando il 1° membro della (14.17), otteniamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} (-1)^k D_q^{(2k)} \left(\frac{\pi}{\sin \pi q} \right) &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k D_q^{(2k)} (2\pi i \sum_{h \geq 0} e^{-i\pi q(2h+1)}) = 2\pi i \sum_{k \geq 0} \pi^{2k} \sum_{h \geq 0} (2h+1)^{2k} e^{-i\pi q(2h+1)} = \\ &= 2\pi i \sum_{k \geq 0} \pi^{2k} \sum_{h \geq 0} (2h+1)^{2k} \{ \cos[\pi q(2h+1)] - i \sin[\pi q(2h+1)] \} = \\ &= 2\pi \sum_{k \geq 0} \pi^{2k} \sum_{h \geq 0} (2h+1)^{2k} \sin[\pi q(2h+1)] + 2\pi i \sum_{k \geq 0} \pi^{2k} \sum_{h \geq 0} (2h+1)^{2k} \cos[\pi q(2h+1)] \end{aligned} \quad (14.18)$$

Uguagliando le parti reali e quelle immaginarie tra l'ultimo membro della relazione precedente (14.18) ed il 2° membro della (14.17), troviamo:

$$\sum_{k \geq 0} \pi^{2k} \sum_{h \geq 0} (2h+1)^{2k} \sin[\pi q(2h+1)] = - \sum_{h \geq 0} \frac{\sin[\pi q(2h+1)]}{\pi^2 (2h+1)^2 - 1} + \frac{1}{4} \frac{\cos(\frac{1}{2} - q)}{\cos \frac{1}{2}} \quad (14.17a)$$

$$\sum_{k \geq 0} \pi^{2k} \sum_{h \geq 0} (2h+1)^{2k} \cos[\pi q(2h+1)] = \sum_{h \geq 0} \frac{\cos[\pi q(2h+1)]}{\pi^2 (2h+1)^2 - 1} - \frac{1}{4} \frac{\sin(\frac{1}{2} - q)}{\cos \frac{1}{2}} \quad (14.18a)$$

Per $q = \frac{1}{2}$, abbiamo, come è noto, $\sin[\pi q(2h+1)] = (-1)^h$, e, $\cos[\pi q(2h+1)] = 0$.

Pertanto, dalla (14.17a), ricaviamo:

$$\sum_{k \geq 0} \pi^{2k} \sum_{h \geq 0} (-1)^h [(2h+1)^{2k}] = - \sum_{h \geq 0} \frac{(-1)^h}{\pi^2 (2h+1)^2 - 1} + \frac{1}{4} \frac{1}{\cos \frac{1}{2}} = 0,180758, \quad (14.17b)$$

mentre il 1° ed il 2° membro della (14.18a) sono nulli.

Dalla (14.17), invece, otteniamo:

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \left(\frac{\pi}{\sin \pi q} \right)_{q=0,5}^{(2k)} = - 2\pi \sum_{h \geq 0} \frac{(-1)^h}{\pi^2 (2h+1)^2 - 1} + \frac{\pi}{2} \frac{1}{\cos \frac{1}{2}} = 1,135737 \quad (14.18b)$$

Le serie indicate al 1° membro delle (14.17b) e (14.18b) sono serie divergenti, rappresentate, rispettivamente, dai valori numerici 0,180758, e, 1,135737.

14.03 Riprendiamo la (14.08)

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k (\ln x)^{2k} = \frac{1}{1 + (\ln x)^2} \quad (14.19)$$

Moltiplicando, per $\frac{x^{q-1}}{(1+x)(1+\ln x)}$, ambo i membri della (14.08), ed integrando,

rispetto ad x , tra i limiti zero ed infinito, otteniamo un'altra serie divergente, definita da:

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \int_0^\infty (\ln x)^{2k} \frac{x^{q-1}}{(1+x)(1+\ln x)} dx = \int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{(1+x)(1+\ln x)} \frac{dx}{1 + (\ln x)^2} \quad (14.20)$$

Ponendo $x = e^z$, nel 1° membro della (14.20), otteniamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} (-1)^k \int_0^\infty (\ln x)^{2k} \frac{x^{q-1}}{(1+x)(1+\ln x)} dx &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \int_0^\infty D_q^{(2k)} \frac{x^{q-1}}{(1+x)(1+\ln x)} dx = \\ &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k D_q^{(2k)} \int_{-\infty}^\infty e^{qz} \frac{1}{(1+e^z)(1+z)} dz \end{aligned} \quad (14.21)$$

L'integrale indicato nell'ultimo membro della (14.21), l'abbiamo calcolato nell'Appendice B, punto 9), utilizzando il 2° teorema integrale di Cauchy, ed abbiamo ottenuto il seguente risultato:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{qz} \frac{1}{(1+e^z)(1+z)} dz = - 2\pi i \sum_{h \geq 0} \frac{e^{i\pi q(2h+1)}}{1+i\pi(2h+1)} + i\pi \frac{e^{1-q}}{e+1} \quad (14.22)$$

Sostituendo la precedente nella (14.21), ricaviamo:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} (-1)^k \int_0^{\infty} (\ln x)^{2k} \frac{x^{q-1}}{(1+x)(1+\ln x)} dx &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k D_q^{(2k)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{qz} \frac{1}{(1+e^z)(1+z)} dz = \\ &= 2\pi \sum_{k \geq 0} \pi^{2k} \sum_{h \geq 0} \frac{(2h+1)^{2k}}{1+\pi^2(2h+1)^2} [\sin[\pi q(2h+1)] - \pi(2h+1) \cos[\pi q(2h+1)]] + \\ &\quad - 2\pi i \sum_{k \geq 0} \pi^{2k} \sum_{h \geq 0} \frac{(2h+1)^{2k}}{1+\pi^2(2h+1)^2} [\pi(2h+1) \sin[\pi q(2h+1)] + \cos[\pi q(2h+1)]] + i\pi \frac{e^{1-q}}{e+1}; \end{aligned} \quad (14.23)$$

ponendo, $x = e^z$, nell'ultimo membro della (14.20), ricaviamo:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{q-1}}{(1+x)(1+\ln x)} \frac{dx}{1+(\ln x)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{qz}}{1+e^z} \frac{1}{1+z} \frac{dz}{1+z^2} \quad (14.24)$$

L'integrale indicato al 2° membro della (14.24) l'abbiamo calcolato nell'Appendice B, punto 10), utilizzando il 2° teo rema integrale di Cauchy, ed abbiamo ottenuto:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{qz}}{1+e^z} \frac{1}{1+z} \frac{dz}{1+z^2} &= 2\pi \sum_{k \geq 0} \frac{\sin[\pi q(2k+1)] - \pi(2k+1) \cos[\pi q(2k+1)]}{1-\pi^4(2k+1)^4} + \\ &+ \frac{\pi}{4} \frac{\cos(\frac{1}{2}-q) - \sin(\frac{1}{2}-q)}{\cos(\frac{1}{2})} + 2\pi i \sum_{k \geq 0} \frac{\cos[\pi q(2k+1)] + \pi(2k+1) \sin[\pi q(2k+1)]}{\pi^4(2k+1)^4 - 1} + \frac{i\pi}{2} \frac{e^{1-q}}{e+1} + \\ &\quad - \frac{i\pi}{4} \frac{\cos(\frac{1}{2}-q) + \sin(\frac{1}{2}-q)}{\cos(\frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (14.25)$$

Uguagliando le parti reali e quelle immaginarie dei secondi membri delle (14.23) e (14.25), otteniamo:

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{k \geq 0} \pi^{2k} \sum_{h \geq 0} \frac{(2h+1)^{2k}}{1+\pi^2(2h+1)^2} [\sin[\pi q(2h+1)] - \pi(2h+1) \cos[\pi q(2h+1)]] &= \\ = 2\pi \sum_{k \geq 0} \frac{\sin[\pi q(2k+1)] - \pi(2k+1) \cos[\pi q(2k+1)]}{1-\pi^4(2k+1)^4} + \frac{\pi}{4} \frac{\cos(\frac{1}{2}-q) - \sin(\frac{1}{2}-q)}{\cos(\frac{1}{2})}; \end{aligned} \quad (14.26)$$

$$\begin{aligned} -2\pi \sum_{k \geq 0} \pi^{2k} \sum_{h \geq 0} \frac{(2h+1)^{2k}}{1+\pi^2(2h+1)^2} [\pi(2h+1) \sin[\pi q(2h+1)] + \cos[\pi q(2h+1)]] + \pi \frac{e^{1-q}}{e+1} &= \\ = 2\pi \sum_{k \geq 0} \frac{\cos[\pi q(2k+1)] + \pi(2k+1) \sin[\pi q(2k+1)]}{\pi^4(2k+1)^4 - 1} + \frac{\pi}{2} \frac{e^{1-q}}{e+1} - \frac{\pi}{4} \frac{\cos(\frac{1}{2}-q) + \sin(\frac{1}{2}-q)}{\cos(\frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (14.27)$$

Per $q = \frac{1}{2}$, abbiamo: $\sin \pi q(2h+1) = (-1)^h$, $\cos \pi q(2h+1) = 0$, e, quindi, dalla (14.26) e (14.27) ricaviamo:

$$\sum_{k \geq 0} \pi^{2k} \sum_{h \geq 0} \frac{(-1)^h (2h+1)^{2k}}{1+\pi^2(2h+1)^2} = - \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{\pi^4(2k+1)^4 - 1} + \frac{1}{8 \cos(\frac{1}{2})} = 0,132178 \quad (14.28)$$

$$\sum_{k \geq 0} \pi^{2k+1} \sum_{h \geq 0} \frac{(-1)^h (2h+1)^{2k+1}}{1 + \pi^2 (2h+1)^2} = - \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k \pi (2k+1)}{\pi^4 (2k+1)^4 - 1} + \frac{1}{8 \cosh(\frac{1}{2})} + \frac{1}{8 \cos(\frac{1}{2})} = 0,221704 \quad (14.29)$$

Osserviamo che le serie indicate nei primi membri delle (14.26) e (14.27) sono serie divergenti, rappresentate, rispettivamente, dai valori dei secondi membri delle medesime (14.26) e (14.27).

Anche le serie indicate nei primi membri delle (14.28) e (14.29), sono serie divergenti, rappresentate, rispettivamente, dai numeri 0,132178 e 0,221704

Conclusioni

Nel corso dell'esposizione dello studio in parola, abbiamo rilevato un numero cospicuo di serie divergenti, a ciascuna delle quali corrisponde un numero o un'espressione numerica finita; abbiamo anche constatato che è possibile utilizzare le serie divergenti nello sviluppo dei normali calcoli matematici.

Ciò corrisponde esattamente a quanto segnalato dal matematico francese Émile Borel, il quale, nell'Introduzione al Testo [6], a pag. 13, affermava:

Le problème fondamental est le suivant: Faire correspondre à chaque série divergente numérique d'une classe aussi large que possible, un nombre tel que la substitution de ce nombre à la série, dans les calculs usuels où elle peut se présenter, donne des résultats exacts, ou du moins presque toujours exacts.

Un vivissimo ringraziamento va rivolto a tutti coloro che, con il loro contributo e con i loro utilissimi suggerimenti, hanno consentito il completamento del presente lavoro. Un particolare ringraziamento va al Prof. Ing. Filippo Aluffi Pentini dell'Università di Roma "Sapienza" per la sua continua, cordiale assistenza e collaborazione.

Siamo grati a tutti coloro che inoltreranno osservazioni o suggerimenti, indirizzando a:

p.cutolo@inwind.it

Appendice B

(SECONDA PARTE)

7) Procedimento per il calcolo di $\Gamma^{(k)}(1)$

$$\begin{aligned}\Gamma^{(k)}(1) &= \lim_{z \rightarrow 1} [\Gamma(z)\Psi(z)]^{(k-1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \Gamma^{(j)}(z)\Psi^{(k-1-j)}(z) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} \Gamma^{(j)}(1)\Psi^{(k-1-j)}(1), \quad (k>0)\end{aligned}\quad (\text{B7.1})$$

essendo
$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^1 \frac{t^{z-1} - 1}{t-1} dt - \gamma, \quad (\text{B7.2})$$

Derivando, n volte, rispetto a z, la (B7.2), ricaviamo:

$$\begin{aligned}\Psi^{(n)}(z) &= \int_0^1 \frac{t^{z-1} (\ln t)^n}{t-1} dt = - \sum_{h \geq 0} \int_0^1 t^{h+z-1} (\ln t)^n dt = (t = e^{-u}) = \\ &= - \sum_{h \geq 0} \int_0^\infty e^{-u(h+z-1)} (-u)^n e^{-u} du = (-1)^{n-1} n! \sum_{h \geq 0} \frac{1}{(h+z)^{n+1}}\end{aligned}\quad (\text{B7.3})$$

Ponendo, nella (B7.3), $z=1$, otteniamo:

$$\Psi^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} n! \sum_{h \geq 0} \frac{1}{(h+1)^{n+1}} = (-1)^{n-1} n! \sum_{h \geq 1} \frac{1}{(h)^{n+1}} = (-1)^{n-1} n! \zeta(n+1), \quad (n>0) \quad (\text{B7.4})$$

Per $n=0$, dalla (B7.2) abbiamo:
$$\Psi(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma \quad (\text{B7.5})$$

Per $n=1$, dalla (B7.4) ricaviamo:
$$\Psi'(1) = \frac{\pi^2}{6}$$

Per $j=k-1$, tenendo presente la (B7.5), dalla (B7.1) ricaviamo:

$$\Gamma^{(k)}(1) = \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-1}{j} \Gamma^{(j)}(1)\Psi^{(k-1-j)}(1) + \Gamma^{(k-1)}(1)(-\gamma)$$

Tenendo presente la (B7.4), troviamo:

$$\Gamma^{(k)}(1) = \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-1}{j} \Gamma^{(j)}(1)(-1)^{k-j} (k-j-1)! \zeta(k-j) + \Gamma^{(k-1)}(1)(-\gamma), \quad (k>1), \quad (\text{B7.6})$$

Ponendo, nella (B7.6), successivamente, $k=2, 3, \dots, k$, possiamo ricavare $k-1$ equazioni, nelle incognite $\Gamma''(1), \Gamma'''(1), \dots, \Gamma^{(k)}(1)$. Supposti noti i valori di $\zeta(k-j)$, $j=0, 1, 2, 3, \dots, k-2$, possiamo, facilmente, ricavare $\Gamma''(1)$ dalla prima equazione, e sostituirla nella seconda; successivamente, ricaviamo $\Gamma'''(1)$ e la sostituiamo nella terza; e, così di seguito, fino ad arrivare a calcolare $\Gamma^{(k)}(1)$ in funzione di termini noti.

Oppure, una volta ricavate le $k-1$ equazioni come sopra definite, è possibile calcolare $\Gamma^{(k)}(1)$ attraverso il metodo di Cramer (Gabriel **Cramer**, nato a Ginevra il 31.07.1704, morto a Bagnols-sur Cèze il 4.01.1752).

Con lo stesso metodo è possibile calcolare anche $\Gamma^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right)$; infatti, ponendo nella

(B7.3), $z = \frac{1}{2}$, ricaviamo:

$$\begin{aligned} \Psi^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) &= (-1)^{n-1} n! \sum_{h \geq 0} \frac{1}{\left(h + \frac{1}{2}\right)^{n+1}} = (-1)^{n-1} n! \sum_{h \geq 0} \frac{2^{n+1}}{(2h+1)^{n+1}} = \\ &= (-1)^{n-1} 2^{n+1} n! \left[\sum_{h \geq 1} \frac{1}{(2h)^{n+1}} + \sum_{h \geq 0} \frac{1}{(2h+1)^{n+1}} - \sum_{h \geq 1} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{(h)^{n+1}} \right] = \\ &= (-1)^{n-1} 2^{n+1} n! \left[\sum_{h \geq 1} \frac{1}{(h)^{n+1}} - \sum_{h \geq 1} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{(h)^{n+1}} \right] = (-1)^{n-1} n! (2^{n+1} - 1) \zeta(n+1) \end{aligned}$$

8) Calcolo e sviluppo dell'integrale $S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{qz}}{1+e^z} \frac{dz}{1+z^2}$

Per il calcolo dell'integrale S utilizziamo il 2° teorema integrale di Cauchy, e scegliamo la curva semplice e chiusa c, come quella del punto 2) dell'Appendice B, (vedasi Fig.1)

La funzione integranda di S presenta infiniti poli nei punti $z_k = i\pi(2k+1)$, $k=0, 1, 2, \dots$; inoltre presenta un polo nel punto $z=i$.

Operando, abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{qx}}{1+e^x} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\pi} \frac{e^{q\rho e^{i\theta}}}{1+e^{\rho e^{i\theta}}} \frac{\rho e^{i\theta} i d\theta}{(1+\rho^2 e^{2i\theta})^2} &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{(z+i)(z-i)} \frac{e^{qz}}{1+e^z} + \\ + 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_k} \sum_{k \geq 0} \frac{z-z_k}{1+e^z} \frac{e^{qz}}{1+z^2} &= \pi \frac{e^{qi}}{1+e^i} + 2\pi i \sum_{k \geq 0} \frac{1}{-1} \frac{e^{qi\pi(2k+1)}}{1+[i\pi(2k+1)]^2} = A(q)+iB(q) \end{aligned}$$

essendo $A(q) = -2\pi \sum_{k \geq 0} \frac{\sin[\pi q(2k+1)]}{\pi^2(2k+1)^2 - 1} + \frac{\pi \cos(\frac{1}{2} - q)}{2 \cos(\frac{1}{2})}$

$$B(q) = 2\pi \sum_{k \geq 0} \frac{\cos[\pi q(2k+1)]}{\pi^2(2k+1)^2 - 1} - \frac{\pi \sin(\frac{1}{2} - q)}{2 \cos(\frac{1}{2})}$$

Per $q = \frac{1}{2}$, abbiamo: $A\left(\frac{1}{2}\right) = -2\pi \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2 - 1} + \frac{\pi}{2 \cos(\frac{1}{2})}$

$$B\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

9) Calcolo e sviluppo dell'integrale $U = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{qz}}{1+e^z} \frac{dz}{1+z}$

Per il calcolo dell'integrale U utilizziamo il 2° teorema integrale di Cauchy, e scegliamo la curva semplice e chiusa c, come quella del punto 2) dell'Appendice B, (vedasi Fig.2)

La funzione integranda di U presenta infiniti poli nei punti $z_k = i\pi(2k+1)$, $k=0, 1, 2, \dots$; operando, abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{-1-\varepsilon} \frac{e^{qx}}{1+e^x} \frac{dx}{1+x} + \int_{-1+\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{qx}}{1+e^x} \frac{dx}{1+x} + \int_0^{\pi} \frac{e^{q\rho e^{i\theta}}}{1+e^{\rho e^{i\theta}}} \frac{\rho e^{i\theta} i d\theta}{1+\rho e^{i\theta}} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\pi}^0 \frac{e^{q(-1+\varepsilon e^{i\theta})}}{1+e^{-1+\varepsilon e^{i\theta}}} \frac{\varepsilon e^{i\theta} id\theta}{1+(-1+\varepsilon e^{i\theta})} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_k} \sum_{k \geq 0} \frac{z-z_k}{1+e^z} \frac{e^{qz}}{1+z} = \\
 & = 2\pi i \sum_{k \geq 0} \frac{1}{-1+i\pi(2k+1)} \frac{e^{i\pi(2k+1)}}{1+i\pi(2k+1)} \tag{B9.1}
 \end{aligned}$$

Per $\rho \rightarrow \infty$, e per $\varepsilon \rightarrow 0$, il 3° integrale del 1° membro della (B9.1) è nullo, e dalla (B9.1), ricaviamo:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{qx}}{1+e^x} \frac{dx}{1+x} & = 2\pi i \sum_{k \geq 0} \frac{1}{-1+i\pi(2k+1)} \frac{e^{i\pi(2k+1)}}{1+i\pi(2k+1)} + i\pi \frac{e^{-q}}{1+e^{-1}} = \\
 & = 2\pi i \sum_{k \geq 0} \frac{1}{-1} \frac{[1-i\pi(2k+1)][\cos \pi q(2k+1) + i \sin \pi q(2k+1)]}{1+\pi^2(2k+1)^2} + i\pi \frac{e^{1-q}}{1+e} = \\
 & = 2\pi \sum_{k \geq 0} \frac{1}{1} \frac{\sin[\pi q(2k+1)] - \pi(2k+1) \cos[\pi q(2k+1)]}{1+\pi^2(2k+1)^2} + \\
 & + 2\pi i \sum_{k \geq 0} \frac{1}{-1} \frac{\cos[\pi q(2k+1)] + \pi(2k+1) \sin[\pi q(2k+1)]}{1+\pi^2(2k+1)^2} + i\pi \frac{e^{1-q}}{1+e} \tag{B9.2}
 \end{aligned}$$

Per $q = \frac{1}{2}$, abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/2}}{1+e^x} \frac{dx}{1+x} = 2\pi \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{1+\pi^2(2k+1)^2} - 2\pi i \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{\pi(2k+1)}{1+\pi^2(2k+1)^2} + i\pi \frac{e^{\frac{1}{2}}}{1+e} \tag{B9.3}$$

10) Calcolo e sviluppo dell'integrale $V = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{qz}}{1+e^z} \frac{1}{1+z} \frac{dz}{1+z^2}$

Per il calcolo dell'integrale V utilizziamo il 2° teorema integrale di Cauchy, e scegliamo la curva semplice e chiusa c, come quella del punto 2) dell'Appendice B, (vedasi Fig.2).

La funzione integrand a di V presenta infiniti poli nei punti $z_k = i\pi(2k+1)$, $k=0, 1, 2, \dots$; inoltre presenta un polo nel punto $z=i$.

Operando, abbiamo:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{-1-\varepsilon} \frac{e^{qx}}{1+e^x} \frac{1}{1+x} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{-1+\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{qx}}{1+e^x} \frac{1}{1+x} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\pi} \frac{e^{q\rho e^{i\theta}}}{1+e^{\rho e^{i\theta}}} \frac{1}{1+\rho e^{i\theta}} \frac{\rho e^{i\theta} id\theta}{1+(\rho e^{i\theta})^2} + \\
 & + \int_{\pi}^0 \frac{e^{q(-1+\varepsilon e^{i\theta})}}{1+e^{-1+\varepsilon e^{i\theta}}} \frac{1}{1+(-1+\varepsilon e^{i\theta})} \frac{\varepsilon e^{i\theta} id\theta}{1+(-1+\varepsilon e^{i\theta})^2} = \\
 & = 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_k} \sum_{k \geq 0} \frac{z-z_k}{1+e^z} \frac{1}{1+z} \frac{e^{qz}}{1+z^2} + 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{(z+i)(z-i)} \frac{e^{qz}}{1+e^z} \frac{1}{1+z} = \\
 & = 2\pi i \sum_{k \geq 0} \frac{1}{-1+i\pi(2k+1)} \frac{1}{1-\pi^2(2k+1)^2} \frac{e^{qi\pi(2k+1)}}{1+e^i} \frac{1}{1+i} \tag{B10.1}
 \end{aligned}$$

Passando al limite per $\rho \rightarrow \infty$, e per $\varepsilon \rightarrow 0$, il 3° integrale del 1° membro della (B10.1)

è nullo, e quindi dalla precedente relazione (B10.1) otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{qx}}{1+e^x} \frac{1}{1+x} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \sum_{k \geq 0} \frac{1-i\pi(2k+1)}{1+\pi^2(2k+1)^2} \frac{\cos[q\pi(2k+1)] + i \sin[q\pi(2k+1)]}{\pi^2(2k+1)^2 - 1} +$$

$$+ \pi \frac{\cos q + i \sin q}{1 + \cos 1 + i \sin 1} \frac{1-i}{2} + \frac{i\pi}{2} \frac{e^{-q}}{1+e^{-1}} = S(q) + iT(q), \text{ dove}$$

$$S(q) = -2\pi \sum_{k \geq 0} \frac{\sin[\pi q(2k+1)] - \pi(2k+1) \cos[\pi q(2k+1)]}{\pi^4(2k+1)^4 - 1} + \frac{\pi}{4} \frac{\cos(\frac{1}{2}-q) - \sin(\frac{1}{2}-q)}{\cos(\frac{1}{2})}; \quad (\text{B10.2})$$

$$T(q) = 2\pi \sum_{k \geq 0} \frac{\cos[\pi q(2k+1)] + \pi(2k+1) \sin[\pi q(2k+1)]}{\pi^4(2k+1)^4 - 1} - \frac{\pi}{4} \frac{\cos(\frac{1}{2}-q) + \sin(\frac{1}{2}-q)}{\cos(\frac{1}{2})} +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \frac{e^{1-q}}{1+e}. \quad (\text{B10.3})$$

Per $q = \frac{1}{2}$, dalle due relazioni precedenti ricaviamo:

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = -2\pi \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{\pi^4(2k+1)^4 - 1} + \frac{\pi}{4} \frac{1}{\cos(\frac{1}{2})} \quad (\text{B10.4})$$

$$T\left(\frac{1}{2}\right) = 2\pi \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k \pi(2k+1)}{\pi^4(2k+1)^4 - 1} - \frac{\pi}{4} \frac{1}{\cos(\frac{1}{2})} + \frac{\pi}{4 \cosh(\frac{1}{2})} \quad (\text{B10.5})$$

Riferimenti

- [1] G. H. Hardy – DIVERGENT SERIES MacMillan And Co. – London 1949
- [2] T. J. l'A. Bromwich AN INTRODUCTION To the theory of INFINITE SERIES Clarendon Press - Oxford 1949
- [3] Konrad Knopp THEORY AND APPLICATION OF INFINITE SERIES Blackie and Son Limited London and Glasgow, 1954
- [4] I.S.GradshTEyn, I.M.Ryzhik Table of Integrals, Series, And Products Academic Press, Inc., 1980
- [5] Ernst Lindelöf Le CALCUL DES RÉSIDUS et ses applications a la Théorie des Fonctions Chelsea Publishing Company New York 1947
- [6] Émile Borel Leçons sur les séries divergentes Deuxième ed. Parigi 1928
- [7] Le Roy: Sur les séries divergentes Annales de la Fac. des sciences de Toulous Vol. 2, pag. 317 – 430, 1900
- [8] Christiane Rousseau Divergent Séries: past, present, future Montréal (Qué), H3C 317, Canada, March 2004
- [9] A.Ghizzetti-L. Marchetti-A.Ossicini Lezioni di Complementi di Matematica Università degli studi di Roma- 1972
- [10] Louis Comtet ADVANCED COMBINATORICS The Art of Finite and Infinite Expansion D. Reidel Publishing Company Dordrecht-Boston 1974
- [11] John Conway-Richard K. Guy IL LIBRO DEI NUMERI Ulrico Hoepli Editore, Milano 1999
- [12] Ronald L. GRAHAM, Donald E. KNUTH, Oren PATASHNIK MATEMATICA DISCRETA (Principi matematici per l'informatica) Ulrico Hoepli Editore, Milano 1996
- [13] Jean-Pierre Ramis Séries Divergentes et Théories Asymptotiques Institut de Recherche Mathématique avancée Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1991 PANORAMAS ET SYNTHÈSES (SMF) 1994
- [14] E. Maillet Sur les séries divergentes et les equations différentielles Ann. Ec. Norm. Sup. Paris (1903), p. 487-518 B. Malgrange "Sommaton des séries divergentes"
- [15] Exp. Math. 13 (1995) – 163-222



Il dott.ing.Pasquale Cutolo, Commendatore della Repubblica Italiana, ha conseguito la Laurea in Ingegneria Elettrotecnica presso l'Università di Napoli; ha conseguito inoltre il Diploma di Specializzazione in Telecomunicazioni, per Ingegneri, presso l'Istituto Superiore delle Poste e delle Telecomunicazioni (ora Istituto Superiore delle Comunicazioni e delle Tecnologie dell'Informazione). Dopo aver superato il concorso d'ingresso nel Ruolo Tecnico degli Ingegneri delle Telecomunicazioni dell'ex Ministero delle Poste e delle Telecomunicazioni, ha percorso l'intera carriera dirigenziale presso il predetto Ministero, svolgendo la propria attività nell'ambito dei Servizi di Telecomunicazione. Membro di Commissioni di Concorsi per Ingegneri. Ha insegnato matematica nei corsi di qualificazione per dipendenti.

p.cutolo@inwind.it