

UNA NOTA SUI COEFFICIENTI DELLE POTENZE DELLO SVILUPPO IN SERIE DELLA FUNZIONE

$$F(t) = \frac{-t}{\ln(1-t)}, \text{ E RELAZIONI CONNESSE}$$

**(A NOTE ON THE COEFFICIENTS OF THE POWERS IN THE EXPANSION
IN SERIES OF THE FUNCTION $F(t) = \frac{-t}{\ln(1-t)}$, AND RELATED CONNEXIONS)**

1.00 **S**ommario: le potenze dello sviluppo in serie della Funzione

Abstract: the powers in the expansion in series of the Function

$$F(t) = \frac{-t}{\ln(1-t)} \quad (1.01)$$

$$F(t) = \frac{-t}{\ln(1-t)} \quad (1.01)$$

presentano dei coefficienti che hanno particolari caratteristiche che andremo ad esaminare.

have coefficients with particular characteristics that we are going to examine.

Nel presente studio vengono prese in esame delle relazioni utili per il calcolo dei coefficienti $\frac{C_K}{k!}$ delle potenze suddette.

In our study we examine some relations useful to calculate the coefficients $\frac{C_K}{k!}$ of the above-mentioned powers.

Infine, vengono prese in esame le relazioni che collegano i numeri C_K con i numeri di Bernoulli, e con i numeri di Stirling di seconda specie.

Furthermore, we consider the relations that link up the numbers C_K with the Bernoulli's numbers, and with the Stirling's numbers of second kind.

2.00 Svolgimento dello studio

Posto

$$F(t) = \frac{-t}{\ln(1-t)} = \sum_{K \geq 0} C_K \frac{t^K}{k!}, \quad |t| \leq 1, \quad (2.01)$$

abbiamo:

$$-t = \sum_{K \geq 0} C_K \frac{t^K}{k!} \sum_{h \geq 1} (-1)^h \frac{t^h}{h} = (h=r+1) = \sum_{K \geq 0} C_K \frac{t^K}{k!} \sum_{r \geq 0} (-1)^{r+1} \frac{t^{r+1}}{r+1}, \quad (2.02)$$

e quindi

$$1 = \sum_{K \geq 0} C_K \frac{t^K}{k!} \sum_{r \geq 0} \frac{t^r}{r+1} \quad (2.03)$$

Derivando la (2.03), n volte, rispetto a t, e ponendo dopo t=0, ricaviamo:

$$\sum_{K=0}^n \binom{n}{K} C_K \frac{(n-K)!}{n-K+1} = 0$$

cioè

$$\sum_{K=0}^n \frac{C_K}{k!} \frac{1}{n-k+1} = 0, \quad n \text{ (intero)} > 0, \quad (2.04)$$

Dalla (2.03), per k=0, ed r=0, abbiamo $C_0 = 1$; ritroviamo lo stesso valore ($C_0 = 1$) se passiamo al limite, per $t \rightarrow 0$, di ambo i membri della (2.01)

La (2.04) rappresenta una relazione attraverso la quale possiamo calcolare tutte le costanti C_K

Dalla (2.04), per n=1, 2, 3, 4, 5... , troviamo, rispettivamente:

$$C_1 = -\frac{1}{2}, C_2 = -\frac{1}{6}, C_3 = -\frac{1}{4}, C_4 = -\frac{19}{30}, C_5 = -\frac{9}{4}, \dots$$

Dalla (2.04) desumiamo, inoltre, che le costanti C_K sono dei numeri razionali

Le costanti C_K sono dei numeri che godono delle seguenti proprietà:

A) Integrando ambo i membri della (2.01), rispetto a t, tra i limiti 0 e 1, ricaviamo:

$$\sum_{K \geq 0} C_K \frac{1}{(k+1)!} = \ln 2 \quad (2.05)$$

Infatti

$$\int_0^1 \frac{-t}{\ln(1-t)} dt = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt = (t = e^{-y}) = \int_0^\infty \frac{e^{-y}-1}{(-y)} e^{-y} dy = \int_0^\infty \frac{e^{-y}-e^{-2y}}{y} dy = \ln 2$$

Ricordiamo che

$$\int_0^\infty \frac{e^{-py}-e^{-qy}}{y} dy = \ln \frac{q}{p}, \quad (2.06)$$

essendo p e q numeri reali positivi.

Ponendo nella (2.06), q=2, p=1, otteniamo il valore fornito dalla (2.05)

B) Dividendo, per t, gli ultimi due membri della (2.01), ed integrando, rispetto a t, tra i limiti 0 e 1, otteniamo:

$$\sum_{K \geq 1} \frac{C_K}{k!k} = -\gamma \quad (2.07)$$

essendo $\gamma = 0,5772156649$ la ben nota costante di Eulero-Mascheroni.

Infatti, operando, abbiamo:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{-1}{\ln(1-t)} dt - \int_0^1 \frac{dt}{t} = - \int_0^1 \frac{1}{\ln t} dt - (\ln t)_0^1 = (t = e^{-y}) = \\ & = - \int_0^\infty \frac{1}{(-y)} e^{-y} dy - (\ln y)_0^1 = \int_0^\infty e^{-y} d \ln y - (\ln y)_0^1 = \\ & = \left[(e^{-y} \ln y)_0^\infty + \int_0^\infty (\ln y) e^{-y} dy \right] - (\ln y)_0^1 \end{aligned}$$

Ora, $\left[\int_0^\infty (\ln y) e^{-y} dy \right] = \Gamma'(1) = \Psi(1) = -\gamma$, mentre $\lim_{y \rightarrow \infty} (e^{-y} \ln y) = 0$;

quindi:

$$-\lim_{y \rightarrow 0} (e^{-y} \ln y) - \gamma + \lim_{y \rightarrow 0} (\ln y) = -\gamma + \lim_{y \rightarrow 0} [(1 - e^{-y}) \ln y] = -\gamma,$$

$$\text{in quanto } \lim_{y \rightarrow 0} [(1 - e^{-y}) \ln y] = 0$$

C) Le costanti C_1, C_2, \dots, C_n sono tutte negative, e lo dimostreremo.

Ammettiamo, per ipotesi, che le costanti C_1, C_2, \dots, C_n siano tutte negative.

Per la (2.04), abbiamo:

$$\sum_{K=0}^n \frac{C_K}{k!} \frac{1}{n-k+1} = \frac{C_0}{0!} \frac{1}{n+1} + \frac{C_1}{1!} \frac{1}{n} + \dots + \frac{C_K}{k!} \frac{1}{n-k+1} + \dots + \frac{C_n}{n!} = 0 \quad (2.08)$$

Sostituendo, nella (2.08), $n+1$ ad n , otteniamo:

$$\sum_{K=0}^{n+1} \frac{C_K}{k!} \frac{1}{n-k+2} = \frac{C_0}{0!} \frac{1}{n+2} + \frac{C_1}{1!} \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{C_K}{k!} \frac{1}{n-k+2} + \dots + \frac{C_{n+1}}{(n+1)!} = 0 \quad (2.09)$$

Moltiplicando ciascun termine della (2.08) per $n+1$, e ciascun termine della (2.09) per $n+2$, e sottraendo, quindi, termine a termine, i risultati ottenuti, abbiamo:

$$\begin{aligned} & \frac{C_1}{1!} \left(\frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1} \right) + \frac{C_2}{2!} \left(\frac{n+1}{n-1} - \frac{n+2}{n} \right) + \dots + \frac{C_K}{k!} \left(\frac{n+1}{n-k+1} - \frac{n+2}{n-k+2} \right) + \dots \\ & \dots + \frac{C_n}{n!} \left(n+1 - \frac{n+2}{2} \right) - \frac{C_{n+1}(n+2)}{(n+1)!} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ora, nella (2.10), i coefficienti delle costanti C_1, C_2, \dots, C_n sono tutti maggiori di zero; infatti esaminando il coefficiente di $C_K/k!$, otteniamo:

$$\begin{aligned} & \frac{n+1}{n-k+1} - \frac{n+2}{n-k+2} = 1 + \frac{k}{n-k+1} - \left(1 + \frac{k}{n-k+2} \right) = k \left(\frac{1}{n-k+1} - \frac{1}{n-k+2} \right) = \\ & = \frac{k}{(n-k+1)(n-k+2)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

il quale, per ogni valore di k intero positivo, compreso tra 1 ed n , risulta sempre positivo.

Avendo ammesso, per ipotesi, che tutte le costanti C_1, C_2, \dots, C_n presentano valori negativi, dalla (2.10) deduciamo che, necessariamente, anche la costante C_{n+1} deve presentare un valore negativo.

Sappiamo, per averli calcolati, che i valori delle costanti C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 sono tutti negativi, e quindi anche i valori delle successive costanti C_6, C_7, \dots devono risultare negativi, come abbiamo dimostrato.

Ora, indicando con C_K^* il valore assoluto di C_K , dalle (2.05) e (2.07), rispettivamente, ricaviamo:

$$\sum_{K \geq 1} C_K^* \frac{1}{(k+1)!} = 1 - \ln 2 \quad (2.12)$$

$$\sum_{K \geq 1} \frac{C_K^*}{k!k} = \gamma \quad (2.13)$$

Dalla (2.01), passando al limite per $t \rightarrow 1^-$, otteniamo:

$$\sum_{K \geq 1} C_K^* \frac{1}{k!} = 1, \text{ oppure } \sum_{K \geq 0} C_K^* \frac{1}{k!} = 2 \quad (2.14)$$

Osservando la (2.14), possiamo ammettere che:

$$\sum_{K \geq 0} (C_K^* \frac{1}{k!} - \frac{1}{2^K}) = 0 \quad (2.15)$$

La (2.15) può essere interpretata affermando che la somma algebrica degli scostamenti dei coefficienti $C_K^* \frac{1}{k!}$ dai valori $1/2^K$, per tutti i valori di k interi non negativi, nell'intervallo $(0, \infty)$ è uguale a zero.

Dal programma "Matematica", (versione 5.0), abbiamo ricavato direttamente i primi diciotto valori di $C_K^* \frac{1}{k!}$, e cioè :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{19}{720}, \frac{3}{160}, \frac{863}{60480}, \frac{275}{24182}, \frac{33953}{3628800}, \frac{8183}{1036800}, \frac{3250433}{479001600}, \frac{4671}{788480}, \frac{13695779093}{2615348736000},$$

$$\frac{2224234463}{475517952000}, \frac{132282840127}{31384184832000}, \frac{2639651053}{689762304000}, \frac{111956703448001}{32011868528640000}, \frac{50188465}{15613165568}$$

Sostituendo, nella (2.01), (t) con (-t), otteniamo:

$$\frac{t}{\ln(1+t)} = \sum_{K \geq 0} C_K \frac{t^K (-1)^K}{k!} \quad (2.16)$$

Ponendo, nella (2.16), $t=1$, ricaviamo:

$$\sum_{K \geq 0} C_K \frac{(-1)^K}{k!} = \frac{1}{\ln 2}$$

Integrando, rispetto a t, ambo i membri della (2.16), tra i limiti 0 ed 1, ricaviamo:

$$\begin{aligned} \sum_{K \geq 0} C_K \frac{(-1)^K}{(1+k)!} &= \int_0^1 \frac{t dt}{\ln(1+t)} = (1+t=e^z) = \int_0^{\ln 2} \frac{(e^z - 1)e^z}{z} dz = \\ &= \sum_{K \geq 0} \frac{1}{k!} \int_0^{\ln 2} \frac{(2z)^K - z^K}{z} dz = \sum_{K \geq 1} \frac{1}{k!k} [(2 \ln 2)^K - (\ln 2)^K] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Dividendo, per t, 1° e 2° membro della (2.16), ed integrando, rispetto a t, tra i limiti 0 ed 1, otteniamo:

$$\begin{aligned} \sum_{K \geq 1} \frac{C_K (-1)^K}{k!k} &= \int_0^1 \frac{dt}{\ln(1+t)} - \int_0^1 \frac{dt}{t} = (1+t=e^z) = \int_0^{\ln 2} \frac{e^z}{z} dz - \int_0^1 \frac{dz}{z} = \\ &= \sum_{K \geq 1} \frac{(\ln 2)^K}{k!k} + \int_0^1 \frac{dz}{z} - \int_{\ln 2}^1 \frac{dz}{z} - \int_0^1 \frac{dz}{z} = \sum_{K \geq 1} \frac{(\ln 2)^K}{k!k} + \ln \ln 2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Sommando, membro a membro, la relazioni (2.17) e (2.18), ricaviamo la relazione:

$$\sum_{K \geq 1} \frac{1}{k!k} \left[(2 \ln 2)^K - C_K (-1)^K \left(2 - \frac{1}{k+1} \right) \right] = 1 - \ln \ln 2$$

3.00 Relazioni connesse con C_K

3.01 Relazione tra C_K e $S(n,k)$

Sostituendo, nella (1.01), $1-t=e^z$, ricaviamo:

$$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{K \geq 0} \frac{C_K}{k!} (1 - e^z)^K \quad (3.01)$$

Ricordando che

$$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{K \geq 1} \frac{z^{K-1}}{k!} = \sum_{K \geq 0} \frac{z^K}{(k+1)!},$$

troviamo:

$$\sum_{K \geq 0} \frac{C_K (-1)^K}{k!} (e^z - 1)^K = \sum_{K \geq 0} \frac{z^K}{(k+1)!} \quad (3.02)$$

Derivando, n volte, ambo i membri della (3.02), rispetto a z, e ponendo dopo z=0, ricaviamo:

$$\sum_{K \geq 0} \frac{C_K (-1)^K}{k!} ((e^z - 1)^K)^{(n)}_{z=0} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \quad (3.03)$$

Dalla formula

$$\binom{m}{p} (e^t - 1)^p = (m)_p \sum_{n \geq 0} S(n, p) \frac{t^n}{n!} \quad (3.04)$$

riportata da Riordan (vedasi testo [1], pag. 91), ponendo p=k, ricaviamo:

$$\frac{(e^t - 1)^k}{k!} = \sum_{n \geq k} S(n, k) \frac{t^n}{n!} \quad (3.05)$$

Nella (3.04), $(m)_p = m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)$, essendo p un numero intero non negativo, mentre i numeri $S(n,p)$ rappresentano i numeri di Stirling di seconda specie.

La formula (3.05) la ritroviamo anche nel testo [2], a pag. 233, e nel testo [3], a pag. 63.

Derivando, n volte, rispetto a t, i due membri della (3.05), ponendo dopo t=0, troviamo:

$$\left[\frac{(e^t - 1)^k}{k!} \right]_{t=0}^{(n)} = S(n, k), \quad (n \geq k) \quad (3.06)$$

La (3.06) è una formula molto importante per mezzo della quale vengono definiti i numeri di Stirling di seconda specie.

E' opportuno precisare che i numeri di Stirling di seconda specie sono definiti anche dalla relazione

$$x^n = \sum_{K=0}^n S(n, k) (x)_K$$

(Vedasi Riordan, testo [2], pag. 202, formula (8)).

(Vedasi anche Roman, testo [4], pp. 60 e 101)

La funzione $(x)_K = x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)$ è la "lower factorial polynomials", chiamata anche "falling factorial" o "binomial polynomials" (vedasi Roman S., testo [4], pagg. 28 e 29).

Sostituendo la (3.06) nella (3.03), otteniamo la relazione:

$$\sum_{K \geq 0} C_K (-1)^K S(n, k) = \frac{1}{n+1} \quad (3.07)$$

Poiché per ogni $k > n$, risulta $S(n, k) = 0$, troviamo la relazione:

$$\sum_{K=0}^n C_K (-1)^K S(n, k) = \frac{1}{n+1} \quad (3.08)$$

La formula (3.08) rappresenta una interessante relazione, che collega i numeri C_K ai numeri di Stirling di seconda specie $S(n, k)$.

La relazione (3.08) consente di calcolare i numeri C_k quando sono noti i numeri $S(n,k)$, e, viceversa, consente di calcolare i numeri $S(n,k)$ quando sono noti i numeri C_k .

Desideriamo fornire un'altra applicazione della (3.06).

E' noto che:

$$e^{cz} = (e^z - 1 + 1)^c = \sum_{K=0}^{\infty} \binom{c}{k} (e^z - 1)^K, \quad |e^z - 1| \leq 1$$

Derivando, n volte, rispetto a z , i membri estremi della precedente, ponendo dopo $z=0$, otteniamo:

$$c^n = \sum_{K=0}^n \binom{c}{k} k! S(n, k), \quad (n, \text{intero positivo})$$

essendo (c) un numero qualunque, reale o complesso.

In particolare, per $c=m$ (intero positivo), ricaviamo:

$$m^n = \sum_{K=0}^n \binom{m}{k} k! S(n, k), \quad m \geq n$$

Per $m \leq n$, dalla precedente otteniamo

$$m^n = \sum_{K=0}^m \binom{m}{k} k! S(n, k)$$

Riportiamo alcune relazioni e correlazioni, riguardanti i numeri di Stirling di seconda specie, che si trovano in Riordan, nel testo [2], pp. 226-227

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n \quad (3.09)$$

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k) \quad (3.10)$$

$$S(k+1, k) = S(k, k-1) + k$$

$$S(k+2, k) = S(k+1, k-1) + kS(k, k-1) + k^2 \quad (3.11)$$

$$S(k+1, k) = \binom{k+1}{2} \quad (3.12)$$

$$S(k+2, k) = \binom{k+2}{3} + 3 \binom{k+2}{4} \quad (3.13)$$

Oltre le relazioni precedenti, sussiste la seguente relazione:

$$\sum_{j=k}^m \binom{m}{j} c^{m-j} S(j, k) = \sum_{j=0}^{m-k} \binom{c}{j} \frac{(k+j)!}{k!} S(m, j+k), \quad m \geq k$$

(essendo, m e k , numeri interi positivi, e (c) un numero qualunque, reale o complesso).

La formula precedente, per $c=1$, si riduce a:

$$\sum_{j=k}^{m-1} \binom{m}{j} S(j, k) = (k+1)S(m, k+1), \quad m \geq k+1$$

Inseriamo anche la seguente formula di duplicazione per i numeri di Stirling di seconda specie:

$$S(n,2m) = \binom{2m}{m}^{-1} \sum_{j=m}^n \binom{n}{j} S(j,m) S(n-j,m), \quad (A.1)$$

$n > 2m$, (n ed m interi positivi)

La formula (A.1) è stata ricavata partendo dalla seguente identità:

$$\frac{(e^z - 1)^{p+q}}{(p+q)!} = \frac{p!q!}{(p+q)!} \frac{(e^z - 1)^p}{p!} \frac{(e^z - 1)^q}{q!}, \quad (A.2)$$

(p, q interi positivi).

Derivando, ambo i membri della (A.2), n volte, rispetto a z, e ponendo dopo $z=0$, otteniamo:

$$S(n,p+q) = \binom{p+q}{p}^{-1} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} S(j,p) S(n-j,q), \quad (A.3)$$

(Vedasi Riordan, testo [2], pag. 204)

Ponendo, nella (A.3), $p=q=m$, troviamo la (A.1)

Riportiamo, nella tabella seguente, i valori di $S(n,k)$ per vari valori di n e di k:

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1		1	1	1	1	1
2			1	3	7	15
3				1	6	25
4					1	10
5						1

Risulta quindi facile verificare la (3.08).

Es. per $n=5$, il valore del 1° membro della (3.08) è dato da:

$$C_0 S(5,0) - C_1 S(5,1) + C_2 S(5,2) - C_3 S(5,3) + C_4 S(5,4) - C_5 S(5,5)$$

Sostituendo, nella precedente, i valori di C_k e di $S(5,k)$, troviamo:

$$0 - (-1/2)(1) + (-1/6)(15) - (-1/4)(25) + (-19/30)(10) - (-9/4)(1) = 1/6,$$

valore perfettamente identico a quello che ricaviamo sostituendo $n=5$, nel 2° membro della (3.08), cioè 1/6

3.02 Relazione tra C_k , $S(n,k)$ e B_n

Dalla (3.01) ricaviamo:

$$\sum_{k \geq 0} \frac{C_k (-1)^k}{k!} (e^z - 1)^k \frac{z}{e^z - 1} = 1 \quad (3.14)$$

cioè

$$C_0 \frac{z}{e^z - 1} + \sum_{k \geq 1} \frac{C_k (-1)^k}{k!} z (e^z - 1)^{k-1} = 1 \quad (3.15)$$

Ricordiamo che

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k \geq 0} B_k \frac{z^k}{k!}, \quad |z| < 2\pi \quad (3.16)$$

dove le costanti B_k rappresentano i ben noti numeri di Bernoulli, i cui primi valori sono dati da:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}$$

$$B_{2n+1} = 0, \text{ per } n = 1, 2, 3, \dots$$

Sostituendo, nella (3.15), $(k+1)$ a (k) , ricordando che $C_0 = 1$, e tenendo presente la (3.16), ricaviamo:

$$\sum_{K \geq 0} B_K \frac{z^K}{k!} - \sum_{K \geq 0} \frac{C_{K+1} (-1)^K z k! (e^z - 1)^K}{(k+1)! k!} = 1 \quad (3.17)$$

Derivando la (3.17), $n+1$ volte, rispetto a z , e ponendo dopo $z=0$, otteniamo:

$$B_{n+1} = \sum_{K \geq 0} \frac{C_{K+1} (-1)^K}{k+1} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \frac{[(e^z - 1)^K]^{(j)}}{k!} (z)_{z=0}^{(n+1-j)}, \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots), \quad (3.18)$$

Il valore di $(z)^{(n+1-j)}$, nel punto $z=0$, è diverso da zero solamente per $j = n$.
Pertanto, applicando la (3.06) alla (3.18), troviamo:

$$\frac{B_{n+1}}{n+1} = \sum_{K=0}^n \frac{C_{K+1} (-1)^K}{k+1} S(n, k), \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots), \quad (3.19)$$

La formula (3.19) rappresenta un'altra interessante relazione che collega i numeri C_K ai numeri di Bernoulli B_n ed ai numeri di Stirling di seconda specie $S(n, k)$.

La relazione (3.19) consente di calcolare i numeri di Bernoulli quando sono noti i numeri C_K ed i numeri $S(n, k)$; ovvero essa consente di calcolare la sequenza di una delle costanti quando sono note le sequenze delle altre due costanti.

Sostituendo nella (3.19), $(2n)$ ad (n) , e ricordando che $B_{2n+1} = 0$, $(n=1, 2, \dots)$, otteniamo:

$$\sum_{K=0}^{2n} \frac{C_{K+1} (-1)^K}{k+1} S(2n, k) = 0$$

La precedente rappresenta un'altra relazione, diversa dalla (3.08), che collega C_K a $S(2n, k)$

La (3.19) è facilmente verificabile.

Es., per $n=3$, il valore del 2° membro della (3.19) è dato da:

$$\frac{C_1}{1} S(3, 0) - \frac{C_2}{2} S(3, 1) + \frac{C_3}{3} S(3, 2) - \frac{C_4}{4} S(3, 3)$$

Sostituendo, nella precedente, i valori di C_K e di $S(n, k)$, otteniamo:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)(0) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)(1) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)(3) - \left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{19}{30}\right)(1) = -\frac{1}{120}$$

valore perfettamente identico a quello del 1° membro della (3.19), che è dato da:

$$\frac{B_4}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{30}\right) = -\frac{1}{120}$$

Tra i numeri di Bernoulli B_n ed i numeri di Stirling di seconda specie, $S(n, k)$, sussiste la seguente relazione:

$$B_n = \sum_{K=0}^n \frac{(-1)^K k!}{k+1} S(n, k), \quad (3.20)$$

La relazione (3.20) è stata ricavata partendo dal seguente sviluppo in serie:

$$\frac{\ln(1-t)}{-t} = \frac{1}{-t} \sum_{K \geq 1} \frac{(-1)^{K-1} (-t)^K}{k} = \sum_{K \geq 1} \frac{t^{K-1}}{k} \quad (3.21)$$

Sostituendo, nella (3.21), $(k-1)$ con (k) , ricaviamo:

$$\frac{\ln(1-t)}{-t} = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k+1} \quad (3.22)$$

Ponendo, nella (3.22), $1-t = e^z$, troviamo:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (e^z - 1)^k}{k+1} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (k!)}{k+1} \left[\frac{(e^z - 1)^k}{k!} \right] \quad (3.23)$$

Derivando i membri estremi della (3.23), n volte, rispetto a z , e ponendo dopo $z=0$, tenendo presente la (3.16) e la (3.06), troviamo la relazione (3.20).

La relazione (3.20) la troviamo nel testo [1], a pag. 45

E' facile verificare la relazione (3.20).

Es., per $n=4$, il valore del 2° membro della (3.20) è data da:

$$\frac{0!}{1} S(4,0) - \frac{1!}{2} S(4,1) + \frac{2!}{3} S(4,2) - \frac{3!}{4} S(4,3) + \frac{4!}{5} S(4,4) = -\frac{1}{30},$$

valore perfettamente identico a quello fornito dal 1° membro della (3.20), e cioè $B_4 = -\frac{1}{30}$

Pertanto, la relazione (3.20) consente di calcolare i numeri di Bernoulli quando sono noti i numeri di Stirling di seconda specie, e, viceversa, consente di calcolare i numeri di Stirling di seconda specie quando sono noti i numeri di Bernoulli.

Sostituendo, nella (3.20), $(2n+1)$ ad (n) , troviamo la relazione:

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k k!}{k+1} S(2n+1, k) = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.24)$$

Siamo grati a tutti coloro che inoltreranno osservazioni o suggerimenti, indirizzando a p.cutolo@inwind.it.

Riferimenti

- [1] JOHN RIORDAN
An Introduction to Combinatorial Analysis
By Bell Telephone Laboratories, Inc.
Princeton University Press, 1978
- [2] JOHN RIORDAN
Combinatorial Identities
John Wiley and Sons, Inc. N.Y. 1968
- [3] LOUIS COMTET
ANALYSE COMBINATOIRE
Presses Universitaires De France
Tome Premier, 1970
- [4] ROMAN, S.
The Umbral Calculus
Academic Press, N.Y. 1984
- [5] <http://mathworld.wolfram.com/StirlingNumberoftheSecondKind>



Il dott.ing.Pasquale Cutolo, Commendatore della Repubblica Italiana, ha conseguito la Laurea in Ingegneria Elettrotecnica presso l'Università di Napoli; ha conseguito inoltre il Diploma di Specializzazione in Telecomunicazioni, per Ingegneri, presso l'Istituto Superior e delle Poste e delle Telecomunicazioni (ora ISCTI). Dopo aver superato il concorso d'ingresso nel Ruolo Tecnico degli Ingegneri delle Telecomunicazioni dell'ex Ministero delle Poste e delle Telecomunicazioni, ha percorso l'intera carriera dirigenziale presso il predetto Ministero, svolgendo la propria attività nell'ambito dei Servizi di Telecomunicazione. Ha insegnato matematica nei corsi di qualificazione per dipendenti.

p.cutolo@inwind.it